分式型與指數型函數的微分問題

摘要

本篇論文主要是研究分式型與指數型函數的微分問題。我們利用二項級數定理和逐項微分定理可以求出這兩種函數的任意階導函數，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。此外，我們舉出兩個函數實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。

關鍵字：二項級數定理、逐項微分定理、無窮級數解、Maple

The Differential Problems of Fractional Type and Exponential Type of Functions

Abstract

This paper mainly studies the differential problems of fractional type and exponential type of functions. We can obtain the derivative of any order of these two types of functions by using binomial series theorem and differentiation term by term theorem, and hence reducing the difficulty of evaluating their higher order derivative values greatly. In addition, we propose two functions to find their any order derivatives and some of their higher order derivative values practically, and the answers of these higher order derivative values are presented in infinite series forms. On the other hand, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these higher order derivative values and their infinite series forms.

Keywords: binomial series theorem, differentiation term by term theorem, infinite series forms, Maple

壹、前言

在微積分課程裡，要求函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 m 階微分值 (m-th order derivative value) $f^{(m)}(c)$ (其中 m 為正整數)，一般而言需要經過兩道手續，首先必須求出 $f(x)$ 的 m 階導函數 $f^{(m)}(x)$，其次再代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值(即 m 比較大的情形)時會面臨計算越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是一件非常不容易的事情，有關研究函數微分問題的書籍和文獻可以參考[1-8]。針對這一個難題，本篇論文主要是探討分式型函數

$$f(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(rx+s)^{cp}}{[a+b(rx+s)^c]^{p+1}} \tag{1}$$

以及指數型函數

$$g(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\exp\ p(\beta x+\delta)}{[a+b\exp(\beta x+\delta)]^{p+1}} \tag{2}$$

的微分問題，其中 k 為非負整數，a,b,c,r,s,β,δ 以及 λ_p 為實數，對所有 $p=0,\ldots,k$ 且 $a,b\neq 0$。我們以這兩種函數作為我們研究的對象，主要是因為利用二項級數定理(binomial series theorem)可以將它們分別表示成冪級數(power series)和指數冪級數(exponential power series)，因此再利用逐項微分定理(differentiation term by term theorem)可以求出這兩種函數的任意階導函數，也就是本文兩個主要的結果：定理 1 和定理 2，因此大大降低了求解這兩種函數高階微分值的困難度。此外，我們舉出兩個函數實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。另一方面，有關 Maple 在其他函數微分問題上的應用可以參考[9-20]。

貳、主要的理論

以下我們先介紹本文中用到的符號：

符號：(i)函數 $f(x)$ 的 m 階導函數記作 $f^{(m)}(x)$，其中 m 為正整數。

(ii)設 a 為實數且 n 為正整數，定義 $(a)_n=a(a-1)\cdots(a-n+1)$；而 $(a)_0=1$。

(iii)設 a 為任意實數，n 為正整數，定義 $\binom{a}{n}=\frac{(a)_n}{n!}$；而 $\binom{a}{0}=1$。

接著是本文用到的兩個重要定理：

二項級數定理 ([21, p244])：設 a,w 為實數且 $|w|<1$。則 $(1+w)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}w^n$。

逐項微分定理 ([21, p230])：如果對所有非負整數 k，函數 $g_k:(a,b)\to R$ 滿足下列三個條件：(i) 存在一點 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 。

以下推導本文兩個主要的結果，首先我們需要一個引理：

引理 L： 假設 k 為非負整數，a,b,y 以及 λ_p 為實數，對所有 $p=0,\ldots,k$ ，$a,b\neq 0$ 。

(i) 若 $|y|<\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p y^p}{(a+by)^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]y^n \tag{3}$$

(ii) 若 $|y|>\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p y^p}{(a+by)^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]y^{-n-1} \tag{4}$$

證明: (i)若 $|y|<\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p y^p}{(a+by)^{p+1}} &= \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p y^p}{a^{p+1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}y\right)^{p+1}}\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p y^p}{a^{p+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p-1)_n}{n!}\left(\frac{b}{a}y\right)^n\right] \quad \text{(利用二項級數定理)} \\
&= \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p}{a^{p+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\binom{n+p}{p}y^{n+p}\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p}{a^{p+1}}\cdot\sum_{n=p}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-p}\binom{n}{p}y^n\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\frac{(-1)^p\lambda_p(n)_p}{a\cdot b^p p!}y^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]y^n \text{ 。}
\end{aligned}$$

(ii)若$|y| > \left|\frac{a}{b}\right|$，則

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{\lambda_p y^p}{(a+by)^{p+1}} = \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p y^p}{b^{p+1}y^{p+1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{a}{by}\right)^{p+1}}\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\lambda_p}{b^{p+1}y}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p-1)_n}{n!}\left(\frac{a}{by}\right)^n\right] \quad \text{(利用二項級數定理)}$$

$$= \sum_{p=0}^{k}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{\lambda_p}{b^{p+1}}\binom{n+p}{p}\cdot y^{-n-1}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\cdot(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]y^{-n-1}$$ ■

利用引理 L 和逐項微分定理可以得到本文第一個主要的結果，有關某種分式型函數的微分問題：

定理 1:設k為非負整數，m為正整數，a,b,c,r,s和λ_p為實數，對所有$p=0,...,k$且$a,b\neq 0$。設函數$f(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(rx+s)^{cp}}{[a+b(rx+s)^c]^{p+1}}$的定義域為$\left\{x\in R \middle| (rx+s)^c\text{存在且不等於}\pm\frac{a}{b}\right\}$。

(i)　若$\left|(rx+s)^c\right| < \left|\frac{a}{b}\right|$，則$f(x)$的$m$階導函數

$$f^{(m)}(x) = r^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n (cn)_m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right](rx+s)^{cn-m} \tag{5}$$

，對所有實數x滿足$\left|(rx+s)^c\right| < \left|\frac{a}{b}\right|$。

(ii)　若$\left|(rx+s)^c\right| > \left|\frac{a}{b}\right|$，則

$$f^{(m)}(x) = r^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n(-cn-c)_m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\cdot(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot(rx+s)^{-cn-c-m} \tag{6}$$

，對所有實數x滿足$\left|(rx+s)^c\right| > \left|\frac{a}{b}\right|$。

證明:　在引理 L 中，令$y=(rx+s)^c$。

(i) 若$\left|(rx+s)^c\right| < \left|\frac{a}{b}\right|$，利用引理 L 之(i)，我們得到

$$f(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(rx+s)^{cp}}{[a+b(rx+s)^c]^{p+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]\cdot(rx+s)^{cn} \qquad (7)$$

利用逐項微分定理，我們得到 $f(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f^{(m)}(x)=r^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n(cn)_m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]\cdot(rx+s)^{cn-m}$$

，對所有實數 x 滿足 $\left|(rx+s)^c\right|<\left|\frac{a}{b}\right|$ 。

(ii) 若 $\left|(rx+s)^c\right|>\left|\frac{a}{b}\right|$ ，利用引理 L 之(ii)，我們得到

$$f(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(rx+s)^{cp}}{[a+b(rx+s)^c]^{p+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\cdot(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot(rx+s)^{-cn-c} \qquad (8)$$

利用逐項微分定理，可以求出 $f(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f^{(m)}(x)=r^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n(-cn-c)_m\cdot\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\cdot(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot(rx+s)^{-cn-c-m}$$

，對所有實數 x 使得 $\left|(rx+s)^c\right|>\left|\frac{a}{b}\right|$ ■

同樣利用引理 L 以及逐項微分定理可以得到本文第二個主要的結果，關於某種指數型函數的微分問題：

定理 2:設 k 爲非負整數， m 爲正整數且 a,b,β,δ 和 λ_p 爲實數，對所有 $p=0,\ldots,k$ ， $a,b\neq 0$ 。設函數 $g(x)=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\exp p(\beta x+\delta)}{[a+b\exp(\beta x+\delta)]^{p+1}}$ 的定義域爲 $\left\{x\in R\,\middle|\,\exp(\beta x+\delta)\neq\left|\frac{a}{b}\right|\right\}$ 。

(i) 若 $\exp(\beta x+\delta)<\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則 $g(x)$ 的 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)=\beta^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n n^m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]\cdot\exp[n(\beta x+\delta)] \qquad (9)$$

，對所有實數 x 滿足 $\exp(\beta x+\delta)<\left|\frac{a}{b}\right|$。

(ii) 若 $\exp(\beta x+\delta)>\left|\frac{a}{b}\right|$，則 $g(x)$ 的 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)=(-\beta)^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n(n+1)^m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot\exp[(-n-1)(\beta x+\delta)] \tag{10}$$

，對所有實數 x 滿足 $\exp(\beta x+\delta)>\left|\frac{a}{b}\right|$。

證明: 在引理 L 中，令 $y=\exp(\beta x+\delta)$。

(i) 若 $\exp(\beta x+\delta)<\left|\frac{a}{b}\right|$，利用引理 L 之(i)得到

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\exp p(\beta x+\delta)}{[a+b\exp(\beta x+\delta)]^{p+1}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]\cdot\exp[n(\beta x+\delta)] \qquad (11)\end{aligned}$$

利用逐項微分定理可以求出 $g(x)$ 的任意 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)=\beta^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n n^m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p\lambda_p\cdot(n)_p}{a\cdot b^p\cdot p!}\right]\cdot\exp[n(\beta x+\delta)]$$

，對所有實數 x 滿足 $\exp(\beta x+\delta)<\left|\frac{a}{b}\right|$。

(ii) 若 $\exp(\beta x+\delta)>\left|\frac{a}{b}\right|$，利用引理 L 之(ii)，我們得到

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p\exp p(\beta x+\delta)}{[a+b\exp(\beta x+\delta)]^{p+1}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot\exp[(-n-1)(\beta x+\delta)] \qquad (12)\end{aligned}$$

利用逐項微分定理，我們得到 $g(x)$ 的任意 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)=(-\beta)^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\right)^n(n+1)^m\left[\sum_{p=0}^{k}\frac{\lambda_p(n+p)_p}{b^{p+1}\cdot p!}\right]\cdot\exp[(-n-1)(\beta x+\delta)]$$

，對所有實數 x 滿足 $\exp(\beta x+\delta)>\left|\frac{a}{b}\right|$ ■

參、例子說明

接著針對本文所探討的分式型與指數型這兩種函數的微分問題，舉出兩個例子實際的利用定理 1 和定理 2 求出這些函數的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。

例題 1:設分式型函數

$$f(x)=\frac{6}{[9-4(2x-1)^2]}+\frac{12(2x-1)^2}{[9-4(2x-1)^2]^2} \tag{13}$$

的定義域爲 $\left\{x\in R \,\middle|\, x\neq \frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right\}$ 。

(i) 若 $|2x-1|<\frac{3}{2}$ ，利用定理 1 之(i)，我們得到 $f(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f^{(m)}(x)=2^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\cdot(2n)_m\cdot\frac{n+2}{3}\cdot(2x-1)^{2n-m} \tag{14}$$

，對所有實數 x 滿足 $|2x-1|<\frac{3}{2}$ 。

因此可以求出 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 的 11 階微分值

$$f^{(11)}\left(\frac{1}{3}\right)=2^{11}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\cdot(2n)_{11}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-11}$$

$$=-\frac{6^{11}}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{81}\right)^n\cdot(2n)_{11}\cdot(n+2) \tag{15}$$

接著我們利用 Maple 算出 $f^{(11)}\left(\frac{1}{3}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

```
>f:=x->6/(9-4*(2*x-1)^2)+12*(2*x-1)^2/(9-4*(2*x-1)^2)^2;
```

$$f:=x\rightarrow\frac{6}{9-4\,(2\,x-1)^2}+\frac{12\,(2\,x-1)^2}{\left(9-4\,(2\,x-1)^2\right)^2}$$

```
>evalf((D@@11)(f)(1/3),20);
```

$$-2.9525114319382451198\cdot 10^{10}$$

```
>evalf(-6^11/3*sum((4/81)^n*product(2*n-j,j=0..10)*(n+2),n=0..infinity),20);
```

$$-2.9525114319382451198\cdot 10^{10}$$

(ii) 若$\left|2x-1\right|>\dfrac{3}{2}$，利用定理 1 之(ii)，我們得到$f(x)$的任意$m$階導函數

$$f^{(m)}(x)=2^m\cdot\frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n(-2n-2)_m\cdot(n-1)\cdot(2x-1)^{-2n-2-m} \tag{16}$$

，對實數x滿足$\left|2x-1\right|>\dfrac{3}{2}$。

所以可以求出$f(x)$在$x=\dfrac{5}{2}$的 16 階微分值

$$f^{(16)}\left(\frac{5}{2}\right)=2^{16}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n(-2n-2)_{16}\cdot(n-1)\cdot4^{-2n-18}$$

$$=\frac{3}{2^{22}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{64}\right)^n(-2n-2)_{16}\cdot(n-1) \tag{17}$$

接著我們利用 Maple 算出$f^{(16)}\left(\dfrac{5}{2}\right)$和它的無窮級數解的近似值：

```
>evalf((D@@16)(f)(5/2),20);
```

$$2.1201304408660265534\cdot10^{11}$$

```
>evalf(3/2^22*sum((9/64)^n*product(-2*n-2-j,j=0..15)*(n-1),n=0..infinity),20);
```

$$2.1201304408660265534\cdot10^{11}$$

例題 2: 設指數型函數

$$g(x)=\frac{8}{5+3\exp(4x-2)}+\frac{6\exp(4x-2)}{[5+3\exp(4x-2)]^2}+\frac{2\exp[2(4x-2)]}{[5+3\exp(4x-2)]^3} \tag{18}$$

的定義域為$\left\{x\in R\,\middle|\,\exp(4x-2)\neq\dfrac{5}{3}\right\}$。

(i) 若$\exp(4x-2)<\dfrac{5}{3}$，利用定理 2 之(i)我們得到$g(x)$的任意m階導函數

$$g^{(m)}(x)=4^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n n^m\left(\frac{n^2-19n+72}{45}\right)\cdot\exp[n(4x-2)] \tag{19}$$

，對所有實數x滿足$\exp(4x-2)<\dfrac{5}{3}$。

因此我們得到$g(x)$在$x=\dfrac{1}{4}$的 13 階微分值

$$g^{(13)}\left(\frac{1}{4}\right)=4^{13}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n n^{13}\left(\frac{n^2-19n+72}{45}\right)\cdot\exp(-n) \tag{20}$$

接著利用 Maple 計算出 $g^{(13)}\left(\frac{1}{4}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

```
>g:=x->8/(5+3*exp(4*x-2))+6*exp(4*x-2)/(5+3*exp(4*x-2))^2+2*exp(2*(4*x-2))/(5+3*exp(4*x-2))^3;
```

$$g := x \to \frac{8}{5+3\,e^{4x-2}} + \frac{6\,e^{4x-2}}{\left(5+3\,e^{4x-2}\right)^2} + \frac{2\,e^{8x-4}}{\left(5+3\,e^{4x-2}\right)^3}$$

```
>evalf((D@@13)(g)(1/4),30);
```

$$-1.35519612644232448264860971030 \cdot 10^{10}$$

```
>evalf(4^13*sum((-3/5)^n*n^13*(n^2-19*n+72)/45*exp(-n),n=0..infinity),30);
```

$$-1.35519612644232448264860970331 \cdot 10^{10}$$

(ii) 若 $\exp(4x-2) > \frac{5}{3}$，利用定理 2 之(ii)我們得到 $g(x)$ 的任意 m 階導函數

$$g^{(m)}(x) = (-4)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n (n+1)^m \cdot \left(\frac{n^2+21n+92}{27}\right) \cdot \exp[(-n-1)(4x-2)] \qquad (21)$$

，對所有實數 x 滿足 $\exp(4x-2) > \frac{5}{3}$ 。

所以可以求出 $g(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 的 16 階微分值

$$g^{(16)}\left(\frac{3}{2}\right) = (-4)^{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n (n+1)^{16} \cdot \left(\frac{n^2+21n+92}{27}\right) \cdot \exp(-4n-4) \qquad (22)$$

同樣我們利用 Maple 計算出 $g^{(16)}\left(\frac{3}{2}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

```
>evalf((D@@16)(g)(3/2),40);
```

$$-1.985679975726370606363706031 63 \cdot 10^{12}$$

```
>evalf((-4)^16*sum((-5/3)^n*(n+1)^16*(n^2+21*n+92)/27*exp(-4*n-4),n=0..infinity),30);
```

$$-1.98567997572637060636370603243 \cdot 10^{12}$$

肆、結論

由上面的討論可以知道定理1和定理2是我們的主要理論依據，並且我們看到二項級數定理和逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位，事實上這兩個定理的應用十分廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些函數的微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會將觸角延伸到其他微積分和高等微積分的問題上，並且利用Maple發展出新的方法來解決這些問題。

參考文獻

1. 葉能哲、賴漢卿 (合譯) (1984)。高等微積分(解析概論) (第二章)(高木貞治 原著)。台北市：文笙書局。
2. Edwards, C. H. Jr., and Penney, D. E. (1986). *Calculus and analytic geometry* (2nd ed.) (chap. 3), New Jersey：Prentice-Hall, Inc.
3. Grossman, S. I. (1992). *Calculus* (5th ed.) (chap. 2), London：Saunders College Publishing.
4. Larson, R., Hostetler, R. P., and Edwards, B. H. (2006). *Calculus with analytic geometry* (8th ed.) (chap. 2), Boston：Houghton Mifflin.
5. Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, *14*(1), 1-90.
6. Azarian, M. K. (1993). There may be more than one way to find the derivative of a function, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *5*(1), 13-15.
7. Euler, R. (1997). A note on Taylor's series for sin(ax+b) and cos(ax+b), *The College Mathematics Journal*, *28*(4), 297-298.
8. Marshall, A. (2000). Math bite: once in a while, differentiation is multiplicative, *Mathematics Magazine*, 302.
9. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用－以兩種函數的導函數閉合型式解求法爲例子。國立虎尾科技大學舉辦之「WCE 2012 民生電子研討會」，雲林縣，P0082。
10. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用—以有理函數的微分問題爲例子。國立高雄應用科技大學舉辦之「2012 光電與通訊工程研討會」，高雄市，第 271-274 頁。
11. 余啓輝 (2012)。傅利葉級數在三角函數微分問題上的應用。遠東學報，29(3)，271-279。
12. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用－以兩種特別函數的微分問題爲例子。長庚大學舉辦之「MC2012 第十七屆行動計算研討會」，新北市，ID17。
13. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用－以求解某種類型有理函數的高階微分值爲例子。國立雲林科技大學舉辦之「DLT2012 數位生活科技研討會」，雲林縣，150-153。
14. 余啓輝 (2012)。Maple 在兩種函數的高階微分值求解問題上的應用。華梵大學舉辦之「DTIM2012 數位科技與創新管理研討會」，新北市，A46。
15. 余啓輝 (2012)。Maple 在微分問題上的應用。萬能科技大學舉辦之「2012 第六屆創新管理學術與實務研討會」，桃園縣。
16. 余啓輝 (2012)。Maple 在雙曲函數微分問題上的應用。吳鳳科技大學舉辦之「ICSSMET 2012 安全管理與工程技術國際研討會」，嘉義縣，481-484。
17. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用－以三角函數的高階微分值求解問題爲例子。吳鳳科技大學舉辦之「ICSSMET2012 安全管理與工程技術國際研討會」，嘉義縣，469-473。
18. 余啓輝 (2012)。Maple 在求函數高階微分值問題上的應用。國立高雄大學舉辦之「ICIM2012 第 23 屆國際資訊管理學術研討會」，高雄市，MS0287。
19. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用—以一些周期函數的微分問題爲例子。中台科技大學舉辦之「IETAC2012 第五屆資訊教育與科技應用研討會」，台中市，D3：11-16。
20. 余啓輝 (2012)。Maple 的應用－以正弦和餘弦函數的微分問題爲例子。永達技術學院舉辦之「屏東台東澎湖地區大專校院第五屆通識教育暨通識課程發展聯合學術研討會」，屏東縣，197-207。
21. Apostol, T. M., *Mathematical analysis* (2nd ed.). Addison-Wesley Publishing Co., Inc, Massachusetts, 1975.