# 修正式部分混成應力有限元素法之限制理論
# Limitation Principle On The Modified Partial Hybrid Stress FEM

凌　烽　生*



**摘　要**

本文提出修正式部分混成應力有限元素法勁度等價性之初步評估，基於保守力場之能量守恆，當彈性力學基本控制方程(平衡方程、位移－應變、應力－應變關係及邊界條件等)等條件得到約束或放鬆，使得位移場、應變場、應力場或部份應力場等之近似場函數的定義模式，決定出能量泛函的給定方式諸如最小位能原理、HR 變分原理、Hu-Washizu 變分原理、混合(Mixed)變分原理及修正式二應力變分原理等。

計算模式直接假設之主要近似場函數，往往與材料性質無關，而所衍生出之場函數卻含有材料常數，因此在建立等價條件時，材料常數的變化，即成為等價關係的限制條件。複合材料積層板結構特性在於層間與表面曳引力邊界條件的滿足，以精確達成力的傳遞。當能量泛函型式所假設之主要近似場函數無法直接處理時，換句話說，此條件無法反應在整體結構勁度上，則所求的解，必然產生可觀的誤差。此處以直接假設層間應力近似場為能量泛函，所引導之計算模式可以有效處理層板邊界應力條件，並論述層間剪應力與層間應力能量泛函之等價性。假使近似場的假設能夠與材料有關，並滿足其他控制方程條件，則直接假設與其衍生之近似場的誤差將縮小。

**關鍵詞：混成應力有限元、限制理論、等價性**

## 壹、研究背景

當處理某一物理問題時，應當選擇何種能量泛函變分原理作為數值計算之理論基礎？其精度是否足夠？計算效率如何？在何種狀況下，各種泛函形式之間的差異性可能會逐漸消失。這些疑問促使我們必須就各種能量泛函所演繹之可計算之勁度矩陣，預測其限制性與精度。因此有必要透過限制理論發展的論述，了解各種變分理論所衍

* 土木工程系副教授

導之有限元素勁度矩陣之等價性(Equivalent)。

經由最小位能原理出發，固體彈性力學基本控制方程(平衡方程、位移－應變、應力－應變關係及邊界條件等)等條件之約束或放鬆，使得位移場、應變場、應力場或部份應力場等之近似場函數的定義，決定了固體能量泛函的給定方式諸如，最小位能原理、HR 變分原理、Hu-Washizu 變分原理、混合(Mixed)變分原理、及修正式二應力變分原理等。

位移有限元素(DF)與具有可獨立假設應力場及位移場之混成應力有限元素模式(HSF)，二者間的等價性是最早被提出的[1]，如果近似位移場與近似應力場存在某一關係，使得由位移場所衍生之應力場與獨立假設之應力場逐漸接近，則兩者模式即有可能是等價的。也就是說，近似應力場伴演的角色，及所提供的功能，例如，力平衡與應力邊界的滿足等，近似位移場也能夠以適當技巧表達出來，則二者是等價的。例如，過去曾有以選擇或縮減式數值積分技巧(selective-reduced integration)運用於位移有限元，也可得到等值於 HR 變分原理所衍導之 HSF 關係式[2]，但所推導之應變場，對近似不可壓縮材料(即 $\nu \rightarrow 0.5$)之彎曲效應產生閉鎖現象，經由採用非諧合式位移場(incompatible mode)[3]修正，可克服該閉鎖現象，由於近似應變場形式受限於材料性質[4]，故影響其使用的空間。同時減積分與加入不諧合模式，僅在於調整修正近似位移場所提供的變形模態，對於力的傳遞功能，並無太大助益。

模態分離位移有限元與六應力 HSF 之間的等價性充要條件也被提出[5]，這個方式仍著墨於位移場模態的改進。Simo 與 Hughes[6]也證明了假設應變場模式與廣義變分 Hu-Washizu 模式之間存在的等值關連性。比較詳細的限制理論說明，出現於有關 HR 泛函變分模式與 Hu-Washizu 泛函變分模式之間的等價性證明[5]，同時也證明了最小位能原理之單一位移場與 Hu-Washizu 三個場(位移、應變與應力)模式之間的等值性，至此，不論是單一場(位移場)、二個場(位移與應變場或位移與應力場)或三個場(位移、應變及應力)之變分原理所推導之元素勁度矩陣，在某些關係條件存在時是等價的。對於以不完整的近似應力場為獨立場，修正 HR 變分原理，推導成部份混成應力有限元素法(PHSF)，亦以類似上述作法，進行了 PHSF 與 HSF 之間元素勁度矩陣等價存在條件的探討與證明[7]。本研究所採用之修正式部分混成應力有限元素法(MPHSF)，由於較 Jing 所倡之 PHSF 多使用了一個橫向正應力( Transverse normal stress)，使得平面應力場與橫向正應力場間，經由波生比效應的影響，產生偶合(coupling)作用。換句話說，在此效應影響下，MPHSF 所未獨立假設之 3 平面應力場，實際上是經由假設位移場所求得之平面應變場與假設橫向正應力場，透過材料組成律而求得。雖然過去源自於 Reissner[8,9]所提出的 mixed 變分原理，Moriya[10], Li[11]以及 Huang *et al.*[12]等亦應用此種泛函變分, 導得三應力之混成應力有限元素法，但迄未提出相關限制理論及勁度矩陣等價性關係，因此本研究即使用與 Stolarski[5]與 Jing[7]之類似作法，提出 MPHSF 與 PHSF 之間的限制理論與等價關係，並對由限制理論所建立的等價存在條件，當應用於複合材料積層板時可能遭遇到的障礙作一初步分析。

## 貳、勁度矩陣的定義

首先依Stolarski所定義之各近似位移及應力場為

$$U=\left\{\{u\}=[N]\{d\}\middle|[N]\in H^{1}(\Omega)\right\} \tag{1}$$

$$S=\left\{\{\sigma\}=[P]\{\beta\}\middle|[P]\in L^{2}(\Omega)\right\} \tag{2}$$

其中　$\{u\}\in U$，$\{\sigma\}\in S$，$H^{1}(\Omega)$一般稱1階Sobolev空間，$L^{2}(\Omega)$為2階可積函數空間，$\Omega$為主要定義域，N為形狀函數，[$P$]代表應力模態。接著即可定義下列空間為，

$$S_{p}=\left\{\{\sigma_{p}\}=[P_{p}]\{\beta\}\middle|[P_{p}]\in L^{2}(\Omega)\right\} \tag{3}$$

$$S_{z}=\left\{\{\sigma_{z}\}=[P_{z}]\{\beta\}\middle|[P_{z}]\in L^{2}(\Omega)\right\} \tag{4}$$

$$S_{t}=\left\{\{\sigma_{t}\}=[P_{t}]\{\beta\}\middle|[P_{t}]\in L^{2}(\Omega)\right\} \tag{5}$$

$$S^{u}{}_{p}=\{\{\sigma_{p}\}=[P^{u}{}_{p}]\{d\}\big|[P^{u}{}_{p}]=[C_{p}][D_{p}][N]+[C_{pz}][D_{z}][N]$$

$$，[N]\in H^{1}(\Omega)\} \tag{6}$$

$$S^{u}{}_{z}=\{\{\sigma_{z}\}=[P^{u}{}_{z}]\{d\}\big|[P^{u}{}_{z}]=[C_{pz}][D_{p}][N]+[C_{z}][D_{z}][N]$$

$$，[N]\in H^{1}(\Omega)\} \tag{7}$$

$$S^{u}{}_{t}=\{\{\sigma_{t}\}=[P^{u}{}_{t}]\{d\}\big|[P^{u}{}_{t}]=[C_{t}][D_{t}][N]，[N]\in H^{1}(\Omega)\} \tag{8}$$

此處下標P 代表平面方向，Z代表橫向正應力方向，t 代表橫向剪應力方向，上標u 代表位移，為求得基於修正式混合變分原理所導得之PHSF，茲推演如下：

$$\{u\}=[N]\{d\} \tag{9}$$

$$\{\sigma_{t}\}=[P_{t}]\{\beta_{t}\} \tag{10}$$

代入Jing-Liao所修正之混合變分原理，下標 t 為橫向剪應力。

$$\Pi_{JL}=\int_{v}\frac{1}{2}\{d\}^{T}[B_{f}]^{T}[C_{f}][B_{f}]\{d\}dv+\{\beta_{t}\}^{T}\int_{v}[P_{t}]^{T}[B_{t}]dv\{d\}$$

$$-\frac{1}{2}\{\beta_{t}\}^{T}\int_{v}[P_{t}]^{T}[C^{-1}{}_{t}][P_{t}]dv\{\beta_{t}\}-\int_{s_{\sigma}}\{\overline{T}\}^{T}[N]ds\{d\} \tag{11}$$

對$\left\{\beta_{t}\right\}$及$\{d\}$變分，得到諧合方程式之形式，

$$\{\beta_{t}\}=\left(\int_{v}[P_{t}]^{T}[C_{t}]^{-1}[P_{t}]dv\right)^{-1}\times\int_{v}[P_{t}]^{T}[B_{t}]dv\{d\} \tag{12}$$

平衡方程為

$$\int[B_{f}]^{T}[C_{f}][B_{f}]dv\{d\}+\int_{v}[P_{t}]^{T}[B_{t}]dv\{\beta_{t}\}=\int_{s_{\sigma}}\left\{\overline{T}\right\}^{T}\left[N\right]ds=\{Q\} \tag{13}$$

$$\Rightarrow\quad[K_{f}]\{d\}+[K_{t}]\{d\}=\{Q\} \tag{14}$$

此處$\{Q\}$為組合式載重向量

$$[K_{f}]=\int_{v}[B_{f}]^{T}[C_{f}][B_{f}]dv \tag{15}$$

$$[K_t]=[\overline{B}_t]^T[\overline{C}_t]^{-1}[\overline{B}_t] \tag{16}$$

其中　$$[\overline{B}_t]=\int_v [P_t]^T[B_t]dv \tag{17}$$

$$[\overline{C}_t]=\int_v [P_t]^T[C_t]^{-1}[P_t]dv \tag{18}$$

由(14~18)得整體控制方程為

$$[K]^{JL}\{d\}=\{Q\} \tag{19}$$

此處　$$[K]^{JL}=[K_f]+[K_t] \tag{20}$$

至於MPHSF之元素勁度矩陣與整體控制方程之推導如下：

將式(4)及式(5)之$\sigma_z$及$\sigma_t$，與式(9)代入式(19)得

$$\Pi_m=\frac{1}{2}\{d\}^T[K_p]\{d\}+\{\beta_t\}^T[\overline{B}_t]\{d\}-\frac{1}{2}\{\beta_t\}^T[\overline{C}_t]\{\beta_t\}$$
$$+\{\beta_z\}^T[\overline{B}_z]\{d\}-\frac{1}{2}\{\beta_z\}^T[\overline{C}_z]\{\beta_z\}-\frac{1}{2}\{\beta_z\}^T[\overline{\overline{C}}_{pz}]\{\beta_z\}$$
$$+\{\beta_z\}^T[\overline{B}_{pz}]\{d\}-\{Q\}^T\{d\} \tag{21}$$

其中　$$[K_p]=\int_v [B_p]^T[C_p]^T[B_p]dv \tag{22}$$

$$[\overline{B}_z]=\int_v [P_z]^T[B_z]dv \tag{23}$$

$$[\overline{C}_z]=\int_v [P_z]^T[C_z]^{-1}[P_z]dv \tag{24}$$

$$[\overline{\overline{C}}_{pz}]=\int_v [P_z]^T[S_{pz}][\overline{C}_{pz}][P_z]dv \tag{25}$$

$$[\overline{B}_{pz}]=\int_v [P_z]^T[\overline{C}_{pz}]^T[B_p]dv \tag{26}$$

對$\beta_t$變分得

$$\{\beta_t\}=[\overline{C}_t]^{-1}[\overline{B}_t]\{d\} \tag{27}$$

對$\beta_z$變分得

$$\{\beta_z\}=([\overline{C}_z]+[\overline{\overline{C}}_{pz}])^{-1}([\overline{B}_z]+[\overline{B}_{pz}])\{d\} \tag{28}$$

再對{d}變分得平衡方程為　$$[K]^m\{d\}=\{Q\} \tag{29}$$

其中　$$[K]^m=[K_p]+[K_t]+[K_z] \tag{30}$$

$$[K_z]=([\overline{B}_z]+[\overline{B}_{pz}])^T([\overline{C}_z+[\overline{\overline{C}}_{pz}])^{-1}([\overline{B}_z]+[\overline{B}_{pz}]) \tag{31}$$

上述勁度矩陣由3部份所組成，其一為平面應力勁度[$K_P$]，由假設位移場控制，次為橫向剪應力勁度{$K_t$}，由假設之橫向剪應力所控制，[$K_Z$]為橫向正應力勁度(包含平面應力引起之波生比偶合效應)，由假設之橫向正應力與假設之位移場共同控制。很明顯地，假設應力場與假設位移場共同影響整體勁度矩陣，如果假設應力場不適當，將減低整體的精度。

## 參、限制理論

依過去證明二個場(HR變分)與三個場(Hu Washizu變分原理)類似之作法[5]，MPHSF與PHSF之間的限制理論(limitation principle)與等價性存在條件關係式提出如下：

證明：$[K]^m = [K]^{JL}$，如果 $U_m = U_{JL}$，$\sigma_t^{\,m} = \sigma_t^{\,JL}$ 且 $\sigma_z^{\,m} \supseteq \sigma_z^{\,u}$ 則 $[K]^m = [K]^{JL}$

上標m代表mixed變分原理，u代表近似位移場，JL代表Jing和Liao(修正式混合變分原理)

證明：

因為 $\sigma_z^{\,m} \supseteq \sigma_z^{\,u}$，所以 $\sigma_z^{\,m} = \sigma_z^{\,u} \oplus \sigma_z^{\,\perp}$ (32)

其中 $\sigma_z^{\,\perp}$與$\sigma_z^{\,u}$為正交組合項，同時

$$[P_z] = [P_z^{\,u}，P_Z^{\,\perp}] \tag{33}$$

由於變分前滿足式(16)所以

此處 $[P_z^{\,u}] = [S^{-1}{}_{pz}][B_p] - [S_{pz}{}^{-1}][S_p][P_p^{\,u}]$ (34)

$$B_p = S_p P_p^{\,u} + S_{pz} P_z^{\,u} \tag{35}$$

所以 $B_p \perp P^{\perp}{}_z$，$P_p^{\,u} \perp P_z^{\perp}$ (36)

且 $[\overline{\overline{C}}_z] = \int_v (P_z^{\,T} C_z^{\,-1} P_z + P_z^{\,T} S_{pz}{}^{T} \overline{C}_{pz} P_z)\, dv$ (37)

$$= \begin{bmatrix} (P_z^{\,u})^T C_z^{\,-1} (P_z^{\,u}) & 0 \\ 0 & (P_z^{\,\perp})^T C_z^{\,-1} (P_z^{\,\perp}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (P_z^{\,u})^T S_{pz}{}^{T} \overline{C}_{pz} P_z^{\,u} & 0 \\ 0 & (P_z^{\,\perp})^T S_{pz}{}^{T} \overline{C}_{pz} P_z^{\,\perp} \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{\overline{B}}_z\right] = \int_v P_z B_z dv + \int_v P_z \overline{C}_{pz} B_p dv$$

$$= \int_v (P_z^{\,u}，P_z^{\,\perp}) B_z dv + \int_v (P_z^{\,u}，P_z^{\,\perp}) \overline{C}_{pz} B_p dv \tag{38}$$

由於$\sigma_z$與面內應力具有偶合效應，所以如前所推導當透過變分滿足式(17)可得

$$[P_z^{\,u}] = S_z^{\,-1} B_z - S_z^{\,-1} S_{pz} P_p^{\,u} \tag{39}$$

則 $B_z \perp P_z^{\,\perp}$，$P_p^{\,u} \perp P_z^{\,\perp}$ (40)

因此 $[\overline{\overline{B}}_z] = \int_v P_z^{\,u} B_z dv + \int_v P_z^{\,u} \overline{C}_{pz} B_p dv$ (41)

為顯性地表示$[K]^m$與$[K]^{JL}$之關係，將$[K]^m$分離成$[K_p]^m$，$[K_z]^m$，$[K_t]^m$

其中 $[K_z]^m = [\overline{\overline{B}}{}^T{}_z][\overline{\overline{C}}_z]^{-1}[\overline{\overline{B}}_z]$

$$
=\left[\left(P_z^{\,u}B_z+P_z^{\,u}\overline{C}_{pz}B_p\right),0\right]\begin{bmatrix}\left[\left(P_z^{\,u}\right)^T\left(C_z^{\,-1}+S_{pz}^{\;\;T}\overline{C}_{pz}\right)P_z^{\,u}\right]^{-1} & 0\\ 0 & \left[\left(P_z^{\perp}\right)^T\left(C_z^{\,-1}+S_{pz}^{\;\;T}\overline{C}_{pz}\right)P_z^{\perp}\right]^{-1}\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\left(P_z^{\,u}B_z+P_z^{\,u}\overline{\overline{C}}_{pz}B_p\right)\\ 0\end{bmatrix} \tag{42}
$$

因為　$P_z^u \perp P_z^{\perp}$ 以及 $P_z^{\,u}\bullet(P_z^{\,u})^{-1}=1$

使得　$$[K_z]_u^{\,m}=\begin{bmatrix}\left(\overline{B}_z+\overline{B}_{zp}\right)^T\left(\overline{C}_z+\overline{\overline{C}}_{zp}\right)^{-1}\left(\overline{B}_z+\overline{B}_{zp}\right) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=[K_z]^{JL} \tag{43}$$

與式(23)到式(26)之定義比較，觀察式(43)中之 $P_z^{\,u}$，皆約分消除掉，換句話說，$[K_Z]^{jL}$是與應力場模態無關，而與材料常數有關。當原來$[K_Z]^m$中之$[P_Z]$模態，僅存在與位移場衍生出之類似應力場模態 $P_z^{\,u}$，則所求得$[K_z]_u^{\,m}$即為$[K_z]^{JL}$

$$
\begin{aligned}
[K]^{JL}&=[K_f]^{JL}{}_u+[K_t]^{JL}\\
&=[K_p]_u^{\,m}+[K_z]_u^{\,m}+[K_t]^m\\
&=[K]^m
\end{aligned} \tag{44}
$$

由於 Jing 已証明 $[K]^{HR}=[K]^{JL}$，如果$U_{HR}=U_{JL}$，$\sigma_z^{\,HR}=\sigma_z^{\,JL}$，$\sigma_t^{\,HR}=\sigma^{JL}{}_t$ 且 $\sigma_z^{\,HR}\geq\sigma_z^{\,u}$，$\sigma_f^{\,HR}\geq\sigma_f^{\,u}$，則$[K]^{HR}=[K]^{JL}$。依類似步驟即可得出 $[K]^{HR}=[K]^{JL}=[K]^m$。至此，PHSF、MPHSF與完整之六混成應力有限元素法HSF之間的元素勁度矩陣等價關係條件得以成立。

## 肆、結論

儘管各種廣義變分衍生出之有限元素勁度矩陣，實質內容可以顯性地表達，過去在這方面地實例亦較少，僅Stolarski *et al.*[5]曾以一矩陣平面元素(等向性材料)之推導為例，說明$[K_{HR}]$與$[K_{HW}]$之間等價關係條件，其中可以發現，直接假設之近似場函數，往往與材料性質無關，而由假設之近似場衍生出之場函數往往含有材料常數，因此在建立兩者間之等價條件時，該材料常數的變化，即成為等價關係的限制條件。除此之外，有關三維等向性矩形元素、三維直交性材料(orthotropic)線彈性元素或複合材料積層板元素等限制理論付之闕如。積層板結構特性在於層間曳引力連續條件與表面曳引力邊界條件的滿足以正確達成力的傳遞。很顯然地，當所用能量泛函型式之假設場函數無法直接處理時，換句話說，此條件無法反應在整體結構勁度上，則所求的解，必然產生可觀的誤差。假使近似場的假設能夠與材料有關，則就有可能為配合滿足其他控制方程條件，導致直接假設及其衍生之近似場的誤差縮小。如果位移有限元中的近似位移場形狀函數，能夠達到應力邊界或力平衡條件的滿足，則就有可能與混成應力有限元等價。為避免過多繁瑣的計算，應選取適當泛函變分原理，儘可能以假設場函數直接滿足彈性力學控制方程，較有可能獲取較高精度。

綜言之，雖然限制理論說明了能量泛函變分原理中近似場的基本差異性，但對於這些不同近似場所衍生出之計算模型，其提出之近似性整體變形能量過多或過少，或是如何逼近於真解變形能量呢?透過實際計算與驗證可以得到答案，但其理論基礎依據，有必要更深入的探討，因此下節即提出固體變形能量界限理論，嘗試界定混成應力有限元素法所引致之近似性固體變形能量的界限。

## 伍、參考文獻

1. F. De Veubeke, Fraeijs, B., “Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method,” in Stress Analysis (Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), John Wiley, London, pp.145-167 (1965).

2. Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., “Mixed Finite Element Methods- Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts,” *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.15, pp.63-81 (1978).

3. Wilson,E.L.,Taylor, R.L. , Doherty, W. P. and Ghaboussi, J. , “Incompatible Displacement Models,” in Steven J. Fenves et al. (eds.), *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press New York, pp. 43-57 (1973).

4. Kang, D. S., “Present Finite Element Technology from a Hybrid Formulation Perspective,” *Computers & Structures*, Vol.35, pp.321-327 (1990).

5. Stolarski, H.; and T. Belytschko, “Limitation Principles for Mixed Finite Elements Based on the Hu-Washizu Variational Formulation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.60, pp.195- 216 (1987).

6. Simo J. C. and Hughes T. J. R., “On the variational foundations of assumed strain methods,” *J. Appl. Mech*, Vol.53, pp.51-54.

7. Jing, Hung-Sying, “On the Limitation Principles for Partial Hybrid Stress Model,” *Computers & Structures*, Vol.38, No. 1, pp.113-117 (1991).

8. Reissner, E., “On a Certain Mixed Variational Theorem and A Proposed Application,” *Int. J. Numerical Methods for Engineers*, Vol.20, pp.1366-1368 (1984).

9. Reisner, E., “On a Mixed Variational Theorem and on Shear Deformable Plate Theory,” *Int. J. Numerical Methods for Engineers*, Vol.23, pp.193-198 (1986).

10. Moriya, K., “Laminated Plate and Shell Elements for Finite Element Analysis of Advanced Fiber Reinforced Composite Structure,” *Transactions Japan Soc. Mech. Eng. (Series A).*

Vol.52, No. 478, pp.1600-1607 (1986).

11. Li,M.S.,Higher Order laminated Composite Plate Analysis by Hybrid Finite Element Method, *Ph. D. Dissertation*, M. I. T., U. S. A (1989).

12. Huang, Q., S. V. Hoa and T. S. Sanker, “A New Finite Element Technique for Analysis of Coupling Stresses in Composite Materials,” *Proc. Int. Conf. Computational En. Mech.*, Science Press, Beijing, pp.12-19 (1987).

# Limitation Principle On The Modified Partial Hybrid Stress FEM

**Feng-Sheng Ling**

## Abstract

This paper is intended to show the new concepts named limitation theorem about the equivalence of the stiffness matrix betwwen kinds of hybrid stress FEM. How to choose appropriate numerical simulation model is the purpose of understanding these study here. When complicated anisotropic material was thought as main analyzed object , then through rational stress parameter assumption , material variation can be approximately resolved concisely.