台灣地震變形監測網品質評估指標及其最佳化設計

張裕民*

摘　要

民國八十九年九月二十一日台灣地區發生強震，地層產生巨大的變形，工程建築物造成嚴重的破壞。為監測地震所產生的變形，預防或警示變形所產生的破壞，保障生命財產之安全，建立台灣地震變形監測網有其必要。本文針對地震變形監測網先行建立品質評估指標，再依評估指標提出監測網最佳化設計方法。

*張裕民：土木工程科副教授

壹、前言

變形監測網直接影響監測品質。良好的監測網不但提供符合監測目的之精度標準，而且可以達到省時省錢之經濟作用。因此，如何將監測網予以最佳化設計以達到所要求的品質，乃為變形監測之重要課題。

測量網形最佳化設計(Optimal Design)之研究首由 Grafarend [1974]提出四類型式：

1. 零級設計(Zero Order Design)：基準問題。
2. 一級設計(First Order Design)：網形結構問題。
3. 二級設計(Second Order Design)：觀測權的分配問題。
4. 三級設計(Third Order Design)：現有網形的改進和加密。

而解算最佳化設計問題的方法，依據 Yao Qi [1986]的研究列有二種：

1.模擬算法(Simulation Method)：乃對一個初始網(根據經驗)利用網形的平差模式對各項品質指標進行評估；若未達設計要求，則改變設計變量，再進行分析和評估；如此多次試算，直到各項品質指標皆滿足設計要求，最後的設計變量便認為最佳解。其缺點為需要藉經驗求解，而得到的解往往也非最佳解。

2.解析算法(Analytical Method)：乃將設計問題表達為設計變量(如觀測權、點位坐標等)及約束條件(如精度、可靠度、經費等)的線性或非線性數學模式，從而計算其最佳解。Grafarend [1975]，Schmitt [1979]，Peng Xianjin [1990]和其他的學者已對此提供了重要的研究經驗，此法的困難在於如何將真正的實質問題提出來並將之組合於合理的數學模式中。

根據 B.S. Everitt [1987]，將 Analytical Method 再區分為如下方法：

I. 直接尋找法(Direct Search Methods)

   1. 1.Univariable Search methods
   2. 2.Multiparameter search methods

II. 梯度法(Gradient Methods)

   3. the steepest descent method
   4. the Newton-Raphson method
   5. the Davidon-Fletcher-Powell method
   6. the Fletcher-Reeves method

基於上述情形，本文針對變形監測網，首先提出其品質評估指標，然後以之組合成一級最佳化之數學模式，最後以解析算法中之 Multiparameter Search Method 求解其最佳解。

貳、變形監測網品質評估指標

傳統的大地網品質分析主要限於網形的精度或強度，七十年代初提出了大地網的可靠度概念，以後針對於變形監測網提出反映變形的靈敏度概念，此外建立網形的經濟性也應作為一個設計目標。因此，變形監測網之品質評估指標包括上述四個方向，今將指標函數分列於後：

(一) 精度(Precision)

由測量平差法，可得下列公式：

觀測方程式 $V=AX-L$ (1)

式中 V 為改正數向量，A 為設計矩陣，X 為未知數向量，L 為觀測量向量。

未知數向量 $X=(APA)^{-1}APL$ (2)

式中 P 為權矩陣

權係數矩陣 $Q_x=(A^TPA)^{-1}$ (3)

單一觀測量中誤差 $\sigma_0=(V^TPV/n-u)^{1/2}$ (4)

式中 n 為觀測總數

u 為未知數數目

協變矩陣 $\Sigma x=\sigma_0^2Q_x$ (5)

點位坐標之精度可以協變矩陣 Σx 之對角線元素代表該坐標值之中誤差。至於反映網形的總體精度是由 Σx 出發推導出一系列單一的數來表示監測網品質的精度指標：

1. N 最佳：$|\Sigma x|=\min$ (6)
2. A 最佳：$t_r(\Sigma x)=\Sigma\lambda i=\min$ (7)

   式中 λi 為 Σx 之非零特徵值
3. D 最佳：$\det(\Sigma x)=\pi\lambda i=\min$ (8)
4. E 最佳：$\lambda\max=\min$ (9)
5. S 最佳：$\lambda\max-\lambda\min=\min$ (10)
6. C 最佳：$\lambda\max/\lambda\min=\min$ (11)
7. F 最佳：$F=f.x$，$Q_F=f^TQ_xf$ (12)

(二) 可靠度(reliability)

網形的可靠度，是指網形偵測出觀測值中存在的誤差以及抵抗觀測數據中殘存誤差對平差成果影響的能力。可分為下列三種方式表示：

1.內可靠度

乃可偵測誤差之最小值。以下式表示：

$$\nabla\ell i=\delta_{\ell i}\frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_i}}$$

式中 $\delta_{\varepsilon i}$ 為觀測量中誤差

δ_0 為由 Significance Level α 及 Power β 決定之值，例

$\alpha=0.01$，$\beta=0.1$，$\delta_0=3.86$

$$\gamma_i=(I-AQ_xA^TP)ii \tag{14}$$

2.外可靠度

乃觀測量誤差對未知數影響之最大值。以下式表示：

$$\delta_{li}=\sigma_{li}\cdot\delta_0\cdot\sqrt{\frac{1-\gamma i}{\gamma i}} \tag{15}$$

3.整體可靠度

$$\gamma=\Sigma\gamma i=\text{redundancy}(\text{多餘觀測數}) \tag{16}$$

一般而言，多餘觀測數與總觀測數之比值

大於 0.3($\frac{\gamma}{n}>0.3$)，可謂良好可靠度。

(三) 靈敏度(Sensitivity)

乃網形可監測之最小變形值 dmin 及其方向。以下列公式表之：

$$\text{變形量}\quad d=X_2-X_1 \tag{17}$$

式中 X_2 為第二期觀測坐標

X_1 為第一期觀測坐標

$$\text{權係數矩陣}\ Q_d=Q_{x2}+Q_{x1} \tag{18}$$

$$=(A^TP_2A)^{-1}+(A^TP_1A)$$

$$\text{權矩陣}\qquad P_d=Q_d^{+}=\begin{bmatrix}P_{dxda} & P_{dxdy}\\ P_{dxdy} & P_{dydy}\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\alpha,\beta\ \text{值之可監測變形量}\ \delta_0^2\sigma_0^2=d^TP_dd \tag{20}$$

$$\text{最小變形值}\quad d_{min}=\frac{\sigma_0\delta_0}{\sqrt{\lambda_{max}}} \tag{21}$$

式中 λ_{max} 為 P_d 之最大特徵值

$$d_{min}\ \text{方向}\quad \phi=\tan^{-1}\frac{\lambda_{max}-P_{dxdx}}{P_{dx\cdot dy}} \tag{22}$$

(四) 費用(cost)

測量控制網的總成本費用可以表示為：

$$C_{\text{總}}=C_{\text{設計}}+C_{\text{埋石}}+C_{\text{觀測}}+C_{\text{計算}}+C_{\text{檢查}} \tag{23}$$

在網形最佳化設計時，不必計算出每項指標，而只需考慮其中受方案變動影響而變化的部分就可以了。其中，C 測量是最佳化設計中最重要的費用項目。

參、一級最佳化數學模式之建立

一級最佳化設計可再細分為觀測網形的選擇及最佳網形位置的確定等二種不同的類型。本文所述限於前者。

最佳化數學模式之建立一般分為三大部分：選擇設計變數，建立目標函數及組成約制條件等。數學模式應合理而正確地顯示設計的目的，技術的要求。

(一) 選擇設計變數(the design variables)

選擇設計變數 Yi 其值如下：

$$Yi=\begin{cases}0 & \text{，當Li被觀測時；}\\ 1 & \text{，當Li不被觀測時。}\end{cases} \tag{24}$$

$i=1,2,\ldots,n$；n 為可能觀測量的總數

$Y=(Y_1，Y_2\ldots\ldots Y_n)$ 代表特定的網形組合

(二)建立目標函數(the objective fumtion)

選擇以最低費用為最佳網形的目標函數，其公式表之為：

$$Z_L=\sum_{j=1}^{m}U_j(1-X_j)+\sum_{j=1}^{m}Cj\sum_{i=1}^{nj}(1-Y_{ji})+\sum_{j=1}^{m}C_{si}\sum_{i=1}^{ns}(1-Y_{si})\longrightarrow \min \tag{25}$$

式中 m 為設站數，U_j 為設站之費用，

C_j 為方向觀測之費用，C_{si} 為距離觀測費用

X_j 為設站之設計變數，其值如下：

$$X_j=\begin{cases}0 & \text{，當j點設站時；}\\ 1 & \text{，當j點不設站時。}\end{cases}$$

(三)組成約制條件

1.精度約制

採用 $Q_f=\min$ 為組成精度約制式，令

$$P_t=\begin{bmatrix}P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & P_n\end{bmatrix},\quad P_y=\begin{bmatrix}P_{y1} & & & \\ & P_{y2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & P_{yn}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$Q_X=(A^TP_tA)-(A^TP_yA)^{-1} \tag{27}$$

$$Q_f=f^TQ_xf \tag{28}$$

精度約制條件式為 $\sigma_0Q_f<\sigma_p^2$ (29)

在變形監測網中，因以點位座標組成距離與方向觀測量之函數，故計算出之 Q_x 即與座標之精度有關。今以 $f=I$，令單位觀測量中誤差 $\sigma_0=1$，並以距離觀測中誤差 σ_s 和方向觀測中誤差 σ_α 平方之倒數分別為距離觀測與方向觀測之權，即

$$P_{si}=\frac{1}{\sigma_{si}^2} \tag{30}$$

$$P_{\alpha i} = \frac{1}{\sigma_{\alpha i}^2} \tag{31}$$

經過這樣的處理，精度約制條件式可簡化為

$$Q_X < \sigma_P^2 \tag{32}$$

式中，σ_P 為點位精度規範值 (33)

2.可靠度約制

採用 $r/n > 0.3$ 得可靠度約制條件式：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i > 0.3n \tag{34}$$

3.靈敏度約制

採用(21)式之 d_{min} 為組成靈敏度約制條件式：

$$d_{min} < \bar{d} \tag{35}$$

式中 $\bar{d}$ 為變形之界限值

肆、最佳化數學模式之求解

採用解析法之 Multiparameter Search Method 求解。其方法為將所有可能的網形觀測組合 Y_T 分別一一測試，看各組是否合乎精度、可靠度、靈敏度之約制條件，再找出合乎條件中費用最低(目標函數)之組合。其求解流程圖如下：

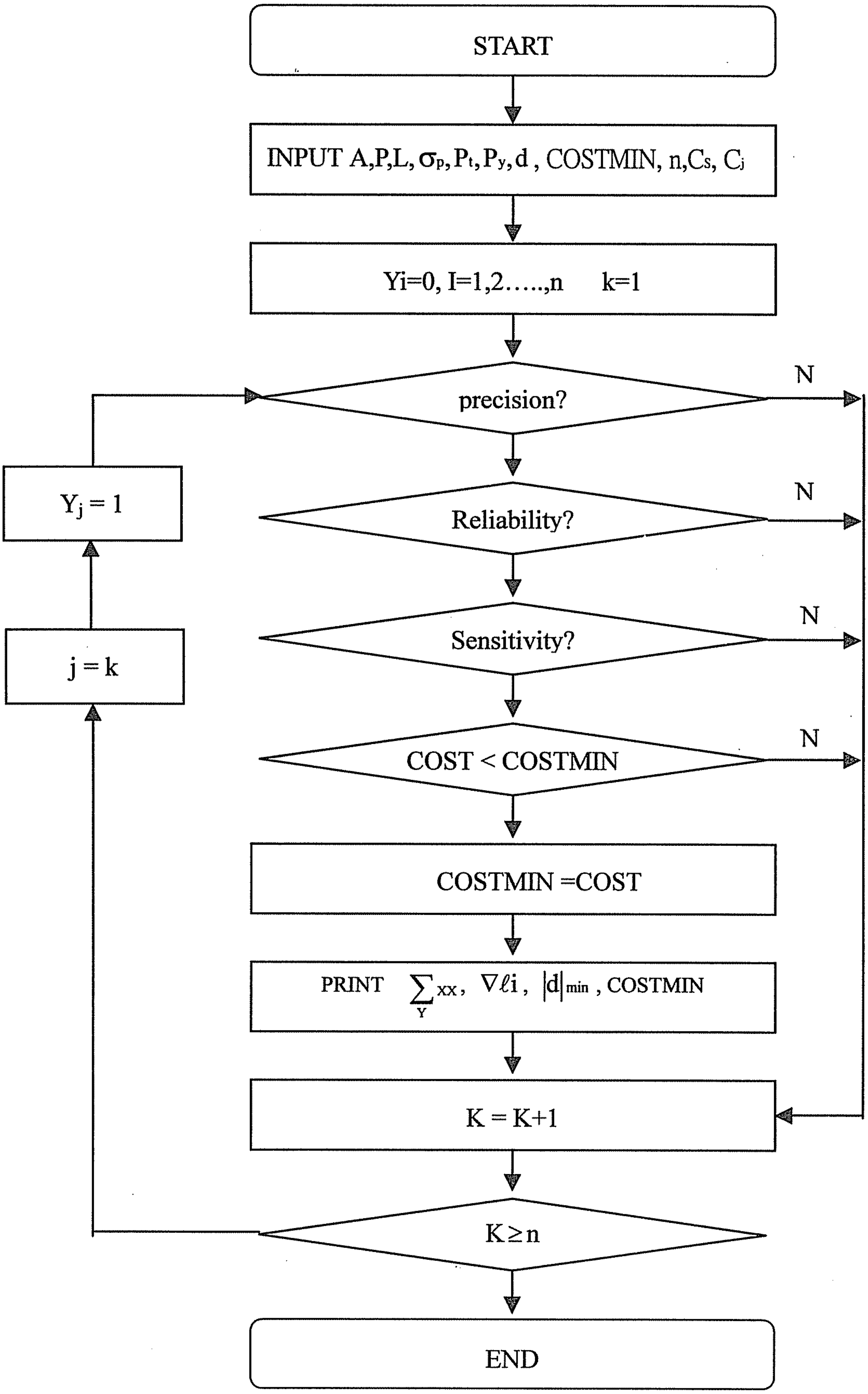

圖 1 最佳數學模式求解流程圖

伍、實例

監測某一水壩之網形配置如圖 2，7 和 8 點為水壩的二個端點，1 和 2 點為基本控制點。

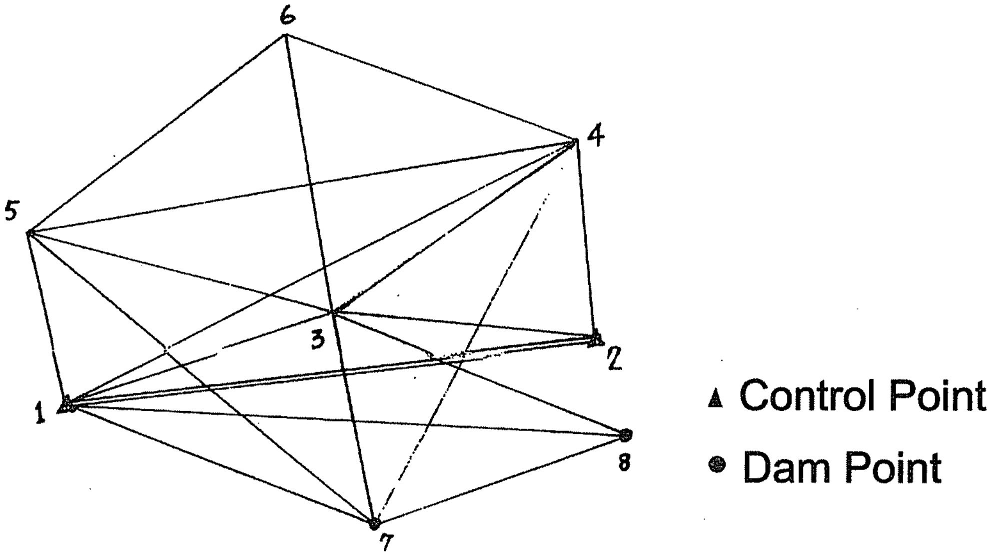

圖 2 網型原始配置圖

輸入之規範值如下：垂直壩軸 $\overline{78}$ 之點位誤差 $\sigma < 2_{mm}$，$C_s = 90$，$C_L = 30$。
經過最佳化設計，求解之結果如圖 3，7 和 8 點之位置誤差橢圓亦顯示於圖內。

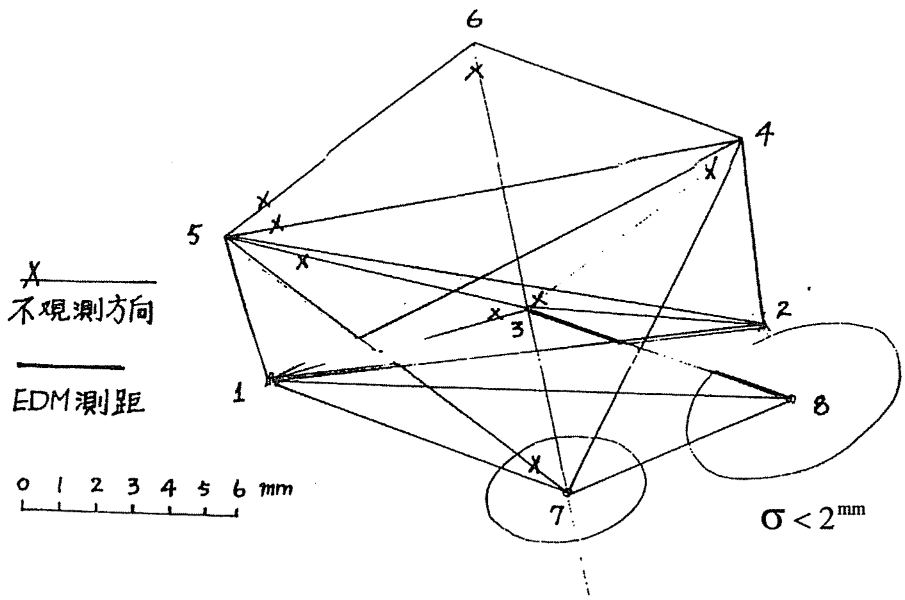

圖 3 最佳化之網型配置圖

為了顯示最佳化的成果，將傳統的三角、三邊和三角三邊觀測之費用及精度並列於表一提供比較。

表一 各類觀測精度及費用比較

	最佳化結果	角測量	邊測量	三角三邊測量
7 之精度(mm)	1.4	1.4	1.9	1.0
8 之精度(mm)	2.0	2.4	5.1	1.8
費用	22,100	25,200	30,000	61,2000

陸、結論與建議

1.變形監測網之最佳化設計可提供經濟且合乎監測要求(精度、可靠度、靈敏度)之品質。

2.本文所使用的 direct search method 對小型監測網相當實用，但隨著點數的增加，其計算量會急驟增加。因此可代之使用 gradient method 求解，速度較快，但數學模式較複雜。

3.利用最佳化解算可提供各種測量用途之標準網形及制定測量規範，為深具研究潛力之領域。

柒、參考文獻

1.Grafarend E. (1974), Optimization of geodetic networks The Canadian Surveyor, Vol.28, Np.25.

2.Yao Qi. (1986), Optimal Arrangement of Observations for Control Networks. The Canadian Surveyor. Vol.40. No.4.

3.B. S. Everitt. (1987), Introduction to Optimization Methods and Their Application in Statistics. CHAPMAN AND HALL. New York.

4.Shanlong Kuang (1992), A New Approach to the Optimal Second-Order Design of Geodetic Networks, Suyvey Review, 31.

5.F. Halmos, J. Somogyi (1979), Optimization of Design and Computation of Control Networks. AKADE'MIAI KIADO, BUDAPEST, HUNGARY.

6.W. Niemeier, W. F. Teskey and R. G. Lyall, (1982), Precision, Reliability and Sensitivity Aspects of an Open Pit Monitoring Network. Aust. J. Geod Photo. Surv. No.37.

7.彭先進 (1991)，測量控制網的優化設計，武漢測繪科技大學出版社。

8.Peng Xianjin, (1990), Optimization of the Configuration of Engineering Surveying Networks Aust. J. Geod. Photogram. Surv. No.52, PP. 21-36.

Quality Estimation Index of the Deformation Monitoring Network and the Optimization Design Method in Taiwan Earthquake

Yu-Min Chang

ABSTRACT

On Sep. 21, 1999, there is a violent earthquake in Taiwan. The stratums of earth were extraordinarily deformed and the engineering structures were tremendously destroyed.

In order to monitor the deformation by the earthquake and provide protection from the damage of the earthquake in Taiwan. The design of deformation monitoring network play a important role in protecting the safety of human propecties. This paper aims to establish the quality index of the deformation monitoring network and to provide the optimation design method depending on these index.