

冷軋成形中三維複合方法之研究

林昇立*

壹、引 言
貳、數學模式
參、結果與討論
肆、結 論
參考文獻

摘 要

本文建立一個三維剛塑性有限元素法與切片法之複合模式。此複合模式依據工件與工具接觸邊界形狀，採用三維剛塑性有限元素法之元素分割方法，將塑性變形區域分割成數個切片；每一切片再分割成數個8節點六面體之同參元素。解析過程中，結合三維剛塑性有限元素法與切片法，建立一套軋軋成形之解析模式。利用此模式得以計算出金屬流之速度場、軋輪壓力、應力、應變和等效應變率等等。

文中將此模式應用於軋軋成形之解析，並與一般的三維剛塑性有限元素法比較；印證其結果非常合理，並可節省大量的CPU時間及記憶體空間。本模式非常適合在個人電腦上執行，也使線上模擬解析的可行性大幅提高。

關鍵詞：三維剛塑性有限元素法、切片法、軋軋成形。

*林昇立：機械工程科專任講師

壹、引言

軋軋成形一直都是金屬塑性成形領域中一門重要的方法。針對它的研究，也都一直不斷地進行。有些學者(1)(2)(3)以實驗進行分析討論；有些學者則是以理論模式進行模擬。不論何種方法，都是希望能確實掌握材料之變形行為，進而得以控制品質，以及輔助製程設計。

在解析理論方面，常用的有切片法、滑移線場、上界限法、有限元素法等等。1925年Karman (4)首先以切片法 (slab method) 計算軋軋力。切片法需要在平面應變之假設條件下使用，所以在解析三維問題時，無法得到令人滿意的精度；尤其是目前所討論的軋軋邊界條件已趨複雜，切片法已經無法適用。

上界限技術 (The upper bound techniques) 理論是在塑性變形區域中，假設一個滿足邊界條件和體積一定條件之動可容速度場；藉由此速度場中參數之最佳化，得以計算出變形所需消耗之能量。同時，可獲得材料塑性流動之速度分佈趨勢。但是，在變形區域邊界複雜時，參數數量需要增加；使得參數不易最佳化，而導致誤差增大。Avitzur (5)分別以切片法和上界限法解析平板軋軋問題，證實上界限法在精度與功能方面都略勝一籌。

有限元素法之理論是將變形區域分割成多數個形狀簡單的元素，然後依元素之形狀特性，組合成整體之結構剛性矩陣；再代入適當的邊界條件解聯立方程組，而後求出元素之應力、應變、成形負荷及變形歷程等。由於在模擬分析時，常因分割元素太多，導致於計算龐大矩陣時，需要相當大量的CPU時間與記憶體容量。早期受限於電腦科技之能力，所以無法適用於塑性力學之模擬分析。近年來，由於電腦在計算能力與記憶體容量有很大的進展，才使有限元素法再度興起，並廣為應用於金屬成形之模擬解析。

Guo-Ji Li等人(6)成功地將二維剛塑性有限元素法 (2-D rigid-plastic FEM) 應用在軋軋成形之平面應變問題上，解析得到工件之應力、應變。J. J. Park等人(7)進一步以三維剛塑性有限元素法 (3-D rigid-plastic FEM) 發展出SHPROL程式來解析型軋軋 (shape rolling)，解析得到工件之應力，應變及等效應變率，並可模擬金屬流動情形。另一方面R. Shivpuri等人(8)以實驗數據印證有限元素法之解析精度，正如我們所預知的，確實優於切片法及上界限法。

雖然近幾年來，電腦科技不斷地創新，不只記憶體容量增大，同時運算速率也以倍數加快；但是，以有限元素法解析三維變形問題時，顯然需要更多的記憶體容量及更快的運算速率。某些情況下，為落實CAD/CAM系統，需在線上即時提供模具設計圖或修訂圖時，在精確度和CPU時間兩者需要兼顧的情況下，我們需要一個有時間效率及經濟價值的解析方法。已經有些學者著手研究降低有限元素法之CPU時間使用量。M. Kiuchi等人(9)首先提出“複合元素法” (Complex Element Method) 結合三維剛塑性有限元素法和切片法之概念。隨後，N. Kim等人(10)提出更簡化的方法，以二維剛塑性有限元素法結合切片法。以上兩種方法，都是將工件分割成數個切片元素，然後在每個切片元素上進行有限元素法解析。雖然都節省了大量的CPU時間，在型軋軋時，卻降低了解析精度。

本文採用三維剛塑性有限元素法中之元素分割的方式，依據素材與工具之接觸

邊界形狀，將塑性變形區域分割成數個切片，每一切片再分割成數個8節點六面體同參元素。針對各個同參元素，應用三維剛塑性有限元素法並結合切片法之平衡條件，建立一個泛用的軋軋解析模式；利用此模式可以計算出應力、應變和等效應變率，並可模擬金屬流動情形。由於每一次迭代計算僅討論一個切片（40個元素），所以節省了大量的CPU時間和記憶體容量，非常適合在個人電腦上執行。

貳、數學模式

一、Lagrange multiplier 剛塑性有限元素法：

以 J. Chakrabarty(11)之虛功原理為基礎，可以建構泛函數 π 之通式如下：

$$\pi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dv - \int_{S_f} T_i \dot{u}_i dS \quad (1)$$

式中， v 是由表面 S_f 和 S_c 所包覆之體積， T_i 為表面力， \dot{u}_i 為速度向量，如圖1所示。 $\bar{\sigma}$ 為有效應力（effective stress）， $\dot{\bar{\epsilon}}$ 為有效應變率（effective strain rate）別定義如下：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}}, \quad \dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$$

式中， σ_{ij} 為偏差應力(stress deviator)， $\dot{\epsilon}_{ij}$ 為應變率(strain rate)。

在平板軋軋時，板寬方向之應變與板厚，及縱方向比較之下，顯然很小；但仍會影響到工件兩側之擴寬及側邊形狀。在此於管制方程式中加入體積一定條件，可以促進模擬材料流動之準確性。尤其是，在型軋軋時，工件側邊之變形更為劇烈，為確保工件形狀精度及應力分佈之準確性，更需加入體積一定條件。

基於上述理由，在(1)式中加入體積一定條件，使之成為Lagrange形式，如下：

$$\pi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dv - \int_{S_f} T_i \dot{u}_i dS + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_v dv \quad (2)$$

式中， $\dot{\epsilon}_v$ 為體積應變率， λ 為Lagrange multiplier。

圖2為本模式之初始網格分割圖，整個塑性變形區域被分割成數個切片，每一個切片再分割成 m 個8節點六面體之同參元素，共有 n 個連結節點。所以每一個元素之泛函數可以表示成

$$\pi_j = \int_j \bar{\sigma} (\{v\}^T [P] \{v\})^{1/2} dv - \int_{S_{fj}} \langle T \rangle [Q] \{v\} dS + \int_j \lambda \langle C \rangle [B] \{v\} dv \quad (3)$$

式中， $\{v\}$ 表示元素上各節點之速度行矩陣， $[B]$ 為應變率矩陣， $\{Q\}$ 為內插函數矩陣，其間之關係示于如下：

$$\{u\} = [Q] \{v\}$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [B]\{v\} \\ [P] &= [B]^T[D][B] \\ [D] &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \\ \langle C \rangle &= \langle 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

為了要解此剛塑性問題，須將(3)式組合後做最小化，以獲得動可容速度場 (Kinematically admissible velocity field)。

$$\text{即 } \delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} \delta \{v\} + \frac{\pi}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} = 0$$

$$\text{所以 } \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} = 0 \quad (6)$$

式(6)之聯立解，可滿足 π 之最小化。

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} = \sum_{j=1}^M \left(\int_{V_j} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \{v\}^T [P] dv - \int_{S_j} \langle T \rangle [Q] dS + \int_{V_j} \lambda \langle C \rangle [B] dv \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} = \sum_{j=1}^M \int_{V_j} \langle C \rangle [B] \{v\} dv = 0$$

將(7)式以泰勒級數展開，並忽略其高階項，可得

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} = \left. \frac{\partial \pi}{\partial \{v\}} \right|_{\{v\}=\{v_0\}} + \left. \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 \{v\}} \right|_{\{v\}=\{v_0\}} \cdot \Delta \{v\} = 0 \quad (8)$$

(8)式之矩陣式可表示如下：

$$\sum_{j=1}^M \begin{bmatrix} R \\ \vdots \\ E \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \frac{\Delta \{v\}}{\lambda} \right\} = \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{F-H}{-E \cdot \{v\}} \right\} \quad (9)$$

$\{v\}=\{v_0\}$ $\{v\}=\{v_0\}$

式中，

$$R = \int_{V_j} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} [P] dv - \int_{V_j} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}^3} [P] \{v\} \{v\}^T [P]^T dv$$

$$E = \int_{V_j} \langle C \rangle [B] dv$$

$$F = \int sf_j \langle T \rangle [Q] dS$$

$$H = \int v_j \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \{v\}^T [P] dv$$

在數值計算程式中，令 λ 為常數，其值常決定於平均應力 σ_m ；再以 Newton-Raphson method 解得滿足泛函數最小化之動可容速度場 $\{v\}$ 。

$$\{v\} = \{v_0\} + \beta \cdot \Delta \{v\} \quad (10)$$

式中， $\{v_0\}$ 為假設之初速。

另一方面，在輓輪與工件之接觸表面上，需考慮摩擦應力。為確保摩擦力與相對速度之關連性，與相對速度之導數在中立點附近之存在性與連續性，Liu 等人(12)認為摩擦應力之式子應如下

$$F_i = -m \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|\bar{u}_i|}{A} \right) \cdot \frac{\bar{u}_i}{|\bar{u}_i|} \quad (11)$$

式中， m 為摩擦係數， $\bar{u}_i = u_i - \dot{U}_i$ ， u_i 為工件速度， \dot{U}_i 為輓輪之線速度，

$$A = \frac{|\dot{U}_i|}{1000}$$

摩擦所造成的損失能量如下式，應加入管制方程式(2)中。

$$\pi f = \int s_c \left(\int_0^{|\bar{u}_i|} F_i \cdot d\bar{u}_i \right) dS \quad (12)$$

本模式之邊界條件如下列：

工件兩端：

$$\dot{u}_x = 0, \dot{u}_y = 0, \dot{u}_z = \text{given} \quad (13)$$

輪與工件之接觸表面上：

$$\{\dot{u}\} \cdot \{n\} = 0$$

式中， $\{n\}$ 為接觸面上之法線單位向量。

二、切片法

在圖2中，每一元素都必須滿足縱向平衡條件如下：

$$\sigma_z(\ell-1) \cdot A(\ell-1) - \sigma_z(\ell) \cdot A(\ell) - P_j \cos \theta \tan \varphi - m \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\bar{u}_z}{|\bar{u}_z|} = 0 \quad (14)$$

式中， $\sigma_z = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} (\dot{\epsilon}_z + \sigma_m)$ ， $A(\ell)$ 和 $A(\ell-1)$ 為作用面積， P_j 為輓輪壓力圖

3，為相對速度在Z軸之分量。由式(14)可推導得該元素之應變率為：

$$\dot{\epsilon}_z(\ell) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma} \cdot A(\ell)} \cdot \sigma_z(\ell-1) \cdot A(\ell-1) + P_j \cos \theta \tan \varphi - m \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\bar{u}_z}{|\bar{u}_z|} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \sigma_m A(\ell) \quad (15)$$

參、結果與討論

為了要驗證本解析模式之可靠性，首先以平面應變軋軋為解析例。此解析例為一軸對稱問題，所以擷取工件之 $\frac{1}{4}$ 部份為解析區域，如圖4。解析條件採用kobayashi(6)文中第8研究例之資料，如表1。鋁合金之流應力表示式如下：

$$\bar{\sigma} = 50.3 \times \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}}{0.05} \right)^{0.26}$$

式中， $\bar{\sigma}$ 為流應力 (MPa)， $\bar{\epsilon}$ 為等效應變。

圖5為平面應變軋軋之初始網格分割圖。圖6為收斂後之相對速度場，從圖中可以清楚地看出平面應變軋軋時工件之變形趨勢。圖中點線表示為中立點 (Neutral point N.P.) 之位置，N.P. 定義為工件與軋輪上線速度相等之接觸點。亦即是，相對速度為零處。圖7為等效應變率分佈圖，圖中最高值出現在入口與中立點之間的表面上，然後朝出口處遞減。此趨勢與Kobayashi(6)之結果一致，初步証實本文之分析模式之可靠性。圖8為等效應變之分佈圖，由於出口處變形量最大，所以圖中顯示該處之等效應變值最高。

在此解析例中，解析區域共分割成1045個節點和720個元素，使用裝載pentium 200MMX晶片之個人電腦，約花7分鐘之PC執行時間。圖9為收斂後整個解析區域之變形網格與速度場。很明顯的遠比SHPROL(7)之計算時間少很多。SHPROL在VAX/VMS-11/750上執行解析平面應變軋軋時，花費14小時CPU 時間。

肆、結論

本文基於三維剛塑性有限元素法之理論架構，從中引入切片法之平衡條件到每個元素上，計算出每個元素之應變率。如此，可以簡化有限元素法之計算空間與時間。經過研究例之印証，本模式在極短時間內可以收斂，得到合理的精度。確信本模式極具效率，非常適合在PC上執行。

參考文獻

- 1.F. A. R. Al-Salehi, et. al. "An Experimental Determination of The Roll Pressure Distributions in Cold Rolling" Int. J. mech. Sci. Pergamon Press. Vol.15, pp.693-710 (1973).
- 2.M. I. Ghobrial, "A Photoelastic Investigation on The Contact Stresses Developed in Rolls During Asymmetrical Flat Rolling" Int. J. Mech. Sci. Vol.31, No. 10, pp.751-764 (1987).
- 3.Hyun-Woo Shin, et. al. "A Study on The Rolling of I-Section Beams" Int. j. Mach. Tools Manufact. Vol.34, No.2, pp.147-160 (1994).
- 4.von Karman, "Contribution to The Theory of Rolling" Z. Angew. Math. Mech., Vol.5, N0.2, pp.139-141. (1925).
- 5.B. Avitzur, "An Upper Bound Approach to Cold Strip Rolling" Trans. ASME, Ser.

- B., Vol.86, pp.31-48 (1964).
6. Guo-Ji Li, S. Kobayashi, "Rigid-Plastic Finite-Element Analysis of Plane Strain Rolling" J. Eng. Indust. ASME, Vol.104, pp.55-64 (1982).
 7. J. J. Park, S. I. Oh, "Application of Three Dimensional Finite Element Analysis to Shape Rolling Processes" J. Eng. Indust. ASME, Vol.112, pp.37-46 (1990).
 8. R. Shivpuri, P. C. Chou "A Comparative Study of Slab, Upper Bound and Finite Element Methods for Predicting Force and Torque in Cold Rolling" Int. J. Mach. Tools Manufact. Vol.29, No.3, pp.305-322 (1989).
 9. M. Kiuchi, J. Yanagimoto, "Computer Aided Simulation of Shape Rolling Processes" Proc. 16th NAMRC, pp.34-40 (1987).
 10. N. Kim, et. al. "Three-Dimensional Analysis and Computer Simulation of Shape Rolling by The Finite and Slab Element Method" Int. J. Mach. Tools Manufac. Vol.31, No.4, pp.553-563 (1991).
 11. J. Chakrabartry, Theory of Plasticity, McGraw-Hill, Inc. (1987).
 12. C. Liu, P. Hartley, C. E. N. Sturgess and G. W. Rowe, "Finite-Element Modeling of Deformation and Spread in Slab Rolling" Int. J. Mech. Sci. Vol.29, No. 4, pp.271- 283 (1987).

表1 解析條件

解 析 條 件	平 面 應 變(6)
工 件 厚 度	2.03 mm
工 件 寬 度	2.03x37.5 mm
軋 輪 直 徑	158.75mm
軋 輪 速 率	9.6 m/min
材 質	鋁 合 金
摩 擦 係 數	0.25
上 下 軋 輪 間 隙	1.346mm
厚 度 減 縮 比	33.75%

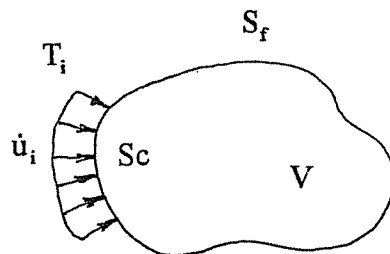


Fig.1 Boundary condition.

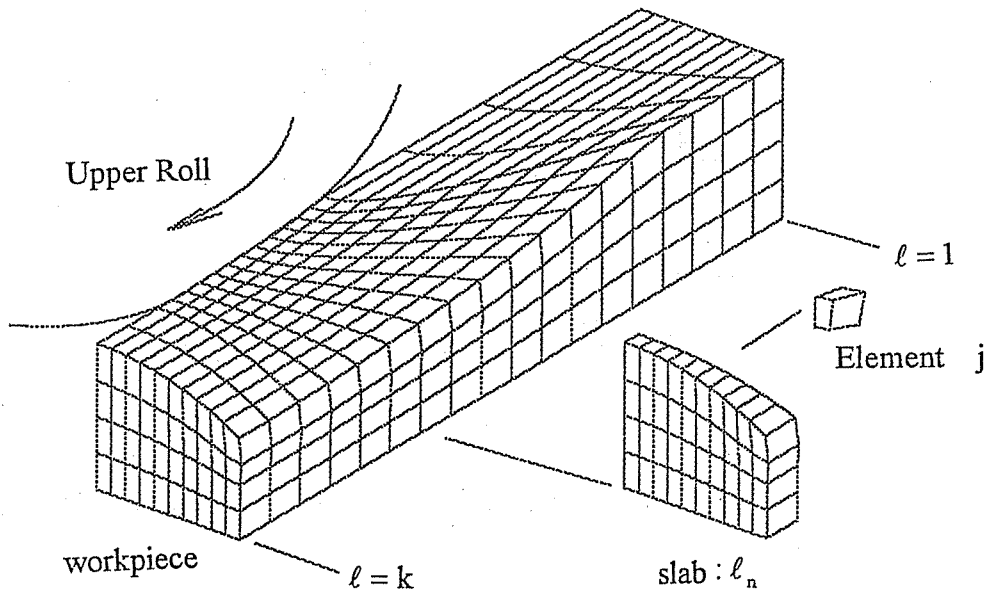


Fig.2 Initial mesh for shape rolling.

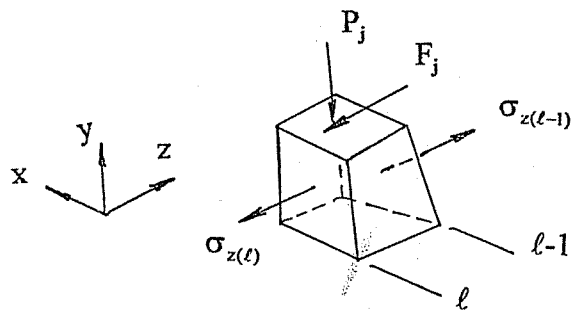


Fig.3 Free body diagram of an element.

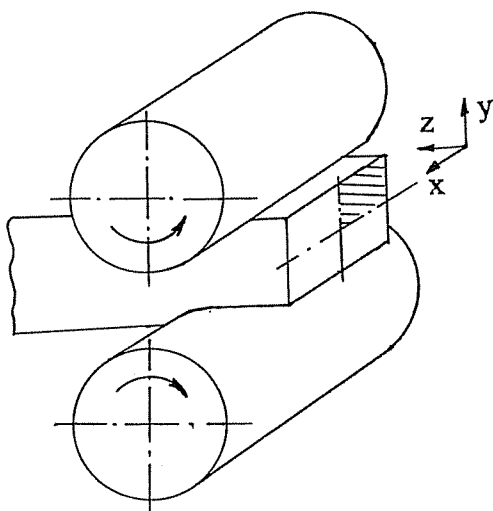


Fig.4 Illustration of rolling. (one fourth of the billet is selected as the analytical region.)

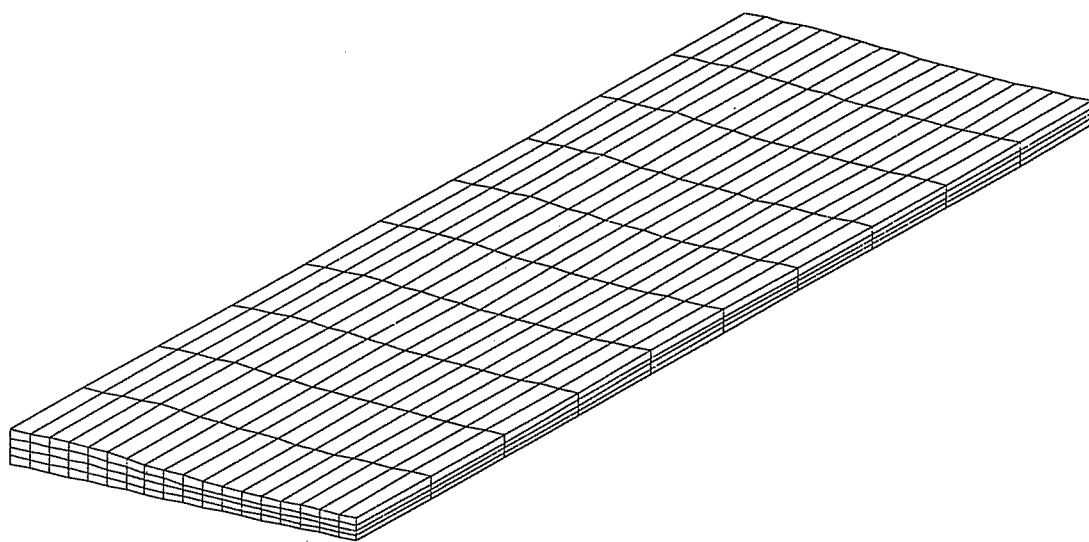


Fig.5 Initial mesh for plane-strain rolling.

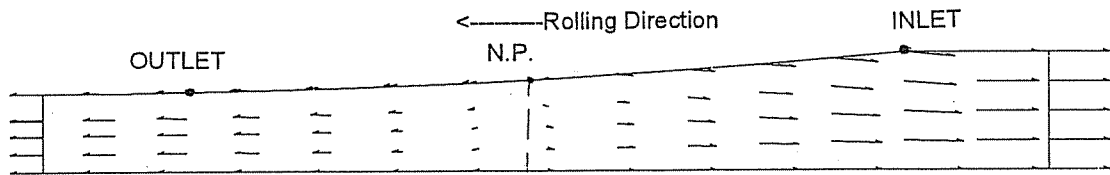


Fig.6 The relative velocity field in the billet.

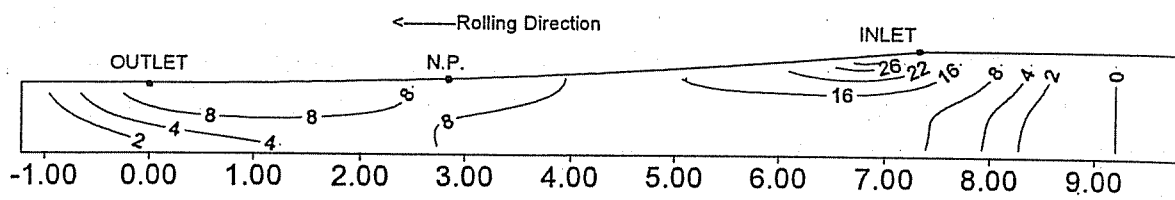


Fig.7 The effective strain rate in the billet.

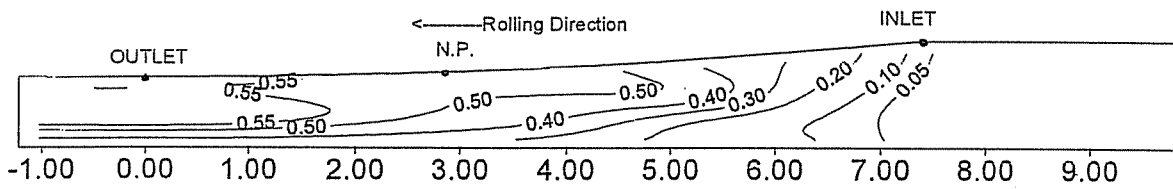


Fig.8 The effective strain in the billet.

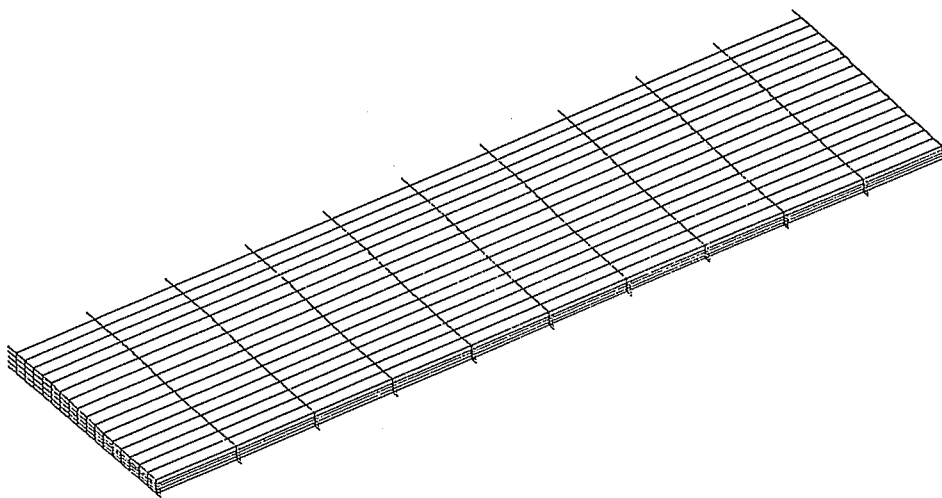


Fig.9 The deformed mesh and velocity field after being converged.

Study of A 3-D Complex Method for Cold Rolling

Sheng-Li Lin

ABSTRACT

A model which combines the rigid-plastic 3-D FEM with the slab method is developed in this paper. Plasticity deformation zone was divided into several slugs. Then, each slug was divided into 40 eight-node-hexahedral isoparametric elements. Combining the rigid-plastic theory with the equilibrium condition of the slab method, a numerical model of rolling was constructed. Based on this model, the metal flow, roll pressure, strain and strain ratio, etc. can be calculated.

Compared with the rigid plastic 3-D FEM, this model confirmed the result to be an acceptable error. Not only could a great deal of simulation time and memory capacity of CPU be saved, it was also very suitable for the personal computers in performance.