

斜交切削之熱彈塑有限元素模式

羅仕鵬* 林有鎰**

壹、緒論
貳、斜交切削之理論基礎
參、切削加工之模擬實例
肆、結果與討論
伍、結論
參考文獻

摘要

本文以大變形—大應變理論、updated Lagrangian formulation (ULF)，和增量原理為基礎，配合熱傳有限差分法，以模擬刀具初始接觸工件開始，直到穩態切削力形成為止的切削行為。在切屑逐步形成時，提出以刀面幾何關係為基礎的方程式來約束流經刀面的切屑節點。根據以上方式而發展出斜交切削之熱彈塑有限元素模式。

將模擬的切屑幾何形狀和Stabler's criterion比較，並將模擬的切削力和比切削能和實驗值比較，結果均在合理的誤差範圍內，證明本模式在幾何條件和力學條件上均具備相當的可行性。

關鍵詞：有限元素法、熱傳有限差分法、三維刀面方程式、斜交切削。

* 羅仕鵬：機械工程科助理教授

** 林有鎰：機械工程科專任講師

壹、緒論

金屬切削 (metal cutting) 過程是一種複雜的加工行為，它是利用刀具與工件之間的相對運動，除去多餘的工件材料的一種加工方法。切削過程主要是在高溫、高壓及高應變率下進行多餘材料的移除作業，因此了解材料在切削過程的物理量的變化，為提高成品尺寸精度和改善成品品質的有效途徑。

1993年，Maekawa和Maeda(1)考慮彈性、塑性、溫度、應變率、摩擦和刀腹磨耗等因素，預測三維切削行為中，工件受到刀具前緣及側緣的影響。同年，Sasahara、Obikawa和Shirakashi(2)考慮材料的幾何非線性，發展三維切削有限元素模式，探討切屑和工件內部的應力和應變的變化，並預測切屑流動的方向。Ueda和Manabe(3)亦於同年發展三維切削剛塑有限元素模式，在極低的切削速度下，流應力不受應變率及溫度的影響，以不同的刀具傾斜角 (inclination angle) 來探討碳鋼工件的切屑成形過程，而得知刀具傾斜角對切屑的幾何形狀和切削力的影響。前二者均以切屑已貼在刀面上為解析條件，無法掌握刀具初始接觸工件的狀況；而後者對加工工件次表面的殘留應力和表面平整度均一無所悉。

本文鑑於以上研究者的缺失，建立一套由刀具初始切入工件開始，而後刀具以增量位移方式逐步往前推移，直到穩態切削力形成為止的斜交切削之熱彈塑有限元素模式。依此模式，在考慮溫度效應和熱傳遞的條件下，解析切削過程中，切屑變形、切屑流動角、切削力和比切削能。

貳、斜交切削之理論基礎

本文基於Prandtl-Reuss流動法則 (flow rule) 和von Mises降伏準則 (yielding criterion)，考慮材料具有等方性應變硬化 (isotropically strain hardening) 的特性，首先推導出一包含應變、應變率、溫度等參數之熱彈塑構成方程式 (constitutive equation)。採用有限變形理論，配合ULF (updated Lagrangian formulation)，及虛功原理平衡方程式，並導入有限元素的關係式。進一步，建立一三維熱傳有限差分方程式來處理工件內部、刀具內部、切屑—刀具間以及工件—周遭空氣間之熱傳遞的問題；最後，發展一三維刀面幾何限制條件來檢驗切屑節點的瞬間位置和修正切屑的流動方向。依上述方式，刀具由初始切入工件開始，以增量位移的方式逐步往前推移，直到穩態切削力形成為止；藉此可發展出一斜交切削之熱彈塑大變形有限元素模式。

一、熱彈塑構成方程式

基於Prandtl-Reuss流動法則和von Mises降伏準則，並考慮材料具有等方性應變硬化的性質而推導出熱彈塑耦合構成方程式，如下：

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^t\}) + \frac{[De] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial R}{\partial \bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial T} dT \right\}}{\dot{H} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1)$$

$$\text{其中, } [D^{ep}] = [D^e] - \frac{[D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial R}{\partial \bar{\epsilon}} d\bar{\epsilon} + \frac{\partial R}{\partial T} dT \right\}}{\dot{H} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}$$

二、斜交切削之熱彈塑大變形有限元素模式

採用大變形—大應變理論(4)，以微小增量位移方式配合updated Lagrangian formulation (ULF) 及增量變分原理，以及建立在Euler stress的基礎上而推導出熱彈塑大變形統御方程式，如下：

$$([K_{ep}] + [K_G]) \{\dot{d}\} = \int_v [B_\epsilon]^T [D^{ep}] \{\dot{\epsilon}^t\} dv - \int_v [B_\epsilon]^T \{\dot{R}_{\bar{\epsilon}T}\} dv + \{\dot{F}_0\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } [K_{ep}] &= \Sigma \text{all element} \int_v [B_\epsilon]^T [D^{ep}] [B_\epsilon] dv \\ [K_G] &= \Sigma \text{all element} \int_v [B_\epsilon]^T [D^G] [B_\epsilon] dv \\ \{\dot{F}_0\} &= \Sigma \text{surface} \int_v [N]^T \{\dot{f}_0\} ds \end{aligned}$$

在斜交切削方面，由於切屑與刀具接觸部份採用局部座標來表示較為簡便。因此，將(2)式等號左邊的節點速度分為內部節點速度與表面節點速度，並考慮摩擦修正矩陣 $[K_f]$ ，則(2)式可表示成：

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{ss} & -\bar{K}_f^{ss} & \bar{K}^{si} & -\bar{K}_f^{si} \\ \bar{K}_{is} & & \bar{K}_{ii} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^s \\ \vdots \\ d_G^i \end{Bmatrix} = \int_v [B_\epsilon]^T [D^{ep}] \{\dot{\epsilon}^t\} dv - \int_v [B_\epsilon]^T \{\dot{R}_{\bar{\epsilon}T}\} dv + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{F} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{其中, } [K_{ss}] = [T]^T [K_{ep}^{ss} + K_G^{ss}] [T]$$

$$[K_{si}] = [T]^T [K_{ep}^{si} + K_G^{si}]$$

$$[\bar{K}_{is}] = [K_{ep}^{is} + K_G^{is}] [T]$$

$$[\bar{K}_{ii}] = [K_{ep}^{ii} + K_G^{ii}]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \beta & -\cos \beta \sin \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin \beta \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

其中， i 為刀具傾斜角

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_n \quad (\alpha_n \text{ 為刀具法線斜角})$$

$$\tan \alpha_n = \tan \alpha_r \times \cos i \quad (\alpha_r \text{ 為刀具後斜角})$$

上式即為斜交切削之熱彈塑大變形有限元素模式。

三、熱分析

工件的塑性變形和切屑—刀具界面間的摩擦是金屬切削過程的兩大熱源。因塑性變形和摩擦二者所產生的熱源，假設發生在每一模擬階段開始的瞬間，然後在時間內均勻的傳遞。此情況在很小時，上述的假設是合理的。如此一來，可視上述熱傳遞的現象為一暫態熱傳問題，其卡氏座標偏微分熱傳方程式為：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (4)$$

四、三維刀面幾何條件與切屑節點修正準則

金屬切削過程中，切屑節點的增量位移經逐步累積後的總位移代表切屑流動的方向。實際切削時，切屑一直都貼在刀面上流動，直到離開刀面為止。因此，本文提出一隨著刀具逐步推移而不斷修正的三維刀面幾何數學模式，以拘束切屑流動的方向，避免切屑節點陷入刀面內，而與實際的切削狀況不相符。

(一) 三維刀面幾何數學模式

設刀具總位移量為 $n \times \Delta x$ ，則：

$$a(x - n \times \Delta x) + by + cz + k = 0 \quad (5)$$

上式稱為三維刀面幾何限制方程式。此式為切削過程中，限制切屑節點的流動路徑的依據。

(二) 切屑節點修正判斷法則

由幾何學 (geometry) 知，空間一平面可以函數 $F(x, y, z)$ 表示。若空間中相鄰的兩點，其座標分別為 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 。已知 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 位於 $F(x, y, z)$ 的一邊，則：

$$F(x_1, y_1, z_1) \times F(x_2, y_2, z_2) = \tilde{k} \quad (6)$$

依 \tilde{k} 值的屬性，可得到下列二種結論：

1. 當 $\tilde{k} \geq 0$ 時， $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 位於 $F(x, y, z)$ 同一邊，不須修 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 。

2. 當 $\tilde{k} < 0$ 時， $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 位於 $F(x, y, z)$ 不同邊，須加以修正。

如以上所述，假設 $F(x, y, z)$ 為三維刀面幾何限制方程式， $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 為相鄰的切屑節點，則(6)式稱為切屑節點修正判斷式。

由(6)式判斷得知，若發現切屑節點陷入刀面內，不符合實際的切削狀況，必須加以逐步修正至刀面上。

參、切削加工之模擬實例

本文以軟鋼 (mild steel) 材料為工件，P20 為刀具。此鋼材之流應力考慮為應變、應變率和溫度的函數(5)，如下：

$$\sigma = A_0(T, \dot{\epsilon}) \left(\frac{\dot{\epsilon}}{1000} \right)^{0.0195} \epsilon^{0.21} \quad (7)$$

其中， σ ：流應變率，單位為：MPa

T ：溫度，單位為K

$\dot{\epsilon}$ ：全應變率，單位為 sec^{-1} ($10^{-3} \sim 10^4$)

ϵ ：全應變，單位為 mm/mm ($0.05 \sim 2$)

$$A_0(T, \dot{\epsilon}) = 1394e^{-0.00118T} + 339e^{-0.0000184[T - (943 + 23.5 \frac{\dot{\epsilon}}{10000})]^2}$$

這裡楊氏彈性係數為 188 GPa，Poisson 比為 0.3 和熱膨脹係數為 $1.281 \times 10^{-5} \text{ mm/mm}/^\circ\text{C}$ 。工件與刀具的熱性質，如表 1 所示。元素網格在 x 方向的長度，等於 0.025mm。

圖 1 說明工件有限元素分割模式及邊界條件。首先將工件有限元素網格分割為 168 個六面體元素 (hexahedron element)，再將每一個六面體元素細分為五個 CST 元素 (constant strain tetrahedron element)；因此，總共分割成 840 個 CST 元素和 315 個節點。其切削長度設定為 2.5mm，切削寬度為 0.6mm，切削深度為 0.2025mm。切削速度為 274.8mm/s。刀具後斜角 (rake angle) 和餘隙角 (clearance angle) 均為 20° ，傾斜角為 10° 。工件底部承受固定支撐 (fixed supports)，其節點在 x、y 和 z 方向均固定、沒有位移；左側為滾子支撐 (roller supports)，其節點在 x 方向固定、但在 y 和 z 方向可移動。

肆、結果與討論

一、切屑節點移動路徑的幾何關係

圖 2 為切削終了，切屑節點移動所構成的流線示意圖。此流線在局部座標

X"Y"Z"上和軸X"所形成的夾角，稱為切屑流動角 (chip flow angle)，以 η 表示。由表2的比較可知，模擬所得的切屑流動角大小均接近刀具傾斜角 ($i=10^0$)，符合Stabler's criterion的幾何要求。由此可證明本模式模擬所得的切屑幾何形狀和流動路徑完全滿足斜交切削過程中的幾何條件的要求。同時，由切屑網格變形中，可以看出切削加工過程中，切屑保持一合理的流線方向，而不會有部份表面節點陷入刀面的現象。

二、切削力和比切削能

圖3為切削力隨刀具移動的變化歷程。本文依模擬所得的切屑節點三方向的分力，經二次座標轉換後，求得沿切削速度方向的分力，稱為切削力 (cutting force)。圖中顯示刀具初始切入工件後，切削力隨刀具逐步推移而增加，然後漸漸趨於穩定且有上下波動的现象；此意味著沿刀面流動的切屑節點有剝離的現象。當切屑節點從工件上剝離時，切削力會下降；而當刀具繼續往前推移時，切削力會再呈上升的趨勢。由圖上可計算出穩態平均切削力 (steady average cutting force) 約為165.25N。

依據正交切削的模式，比切削能 (specific cutting energy) 定義為工件未加工面的單位截面積的切削力(6)。本文的斜交切削模式依循上述定義所求出的比切削能列於表3。

表3的實驗數據係依據Lin等(7)的正交切削實驗而得；其中，設定切削寬度為、切削深度為0.27mm。由動力計 (dynamometer) 量測得到的實驗切削力為1475N，將該值除以未加工面的截面積 ($3.5\text{mm} \times 0.27\text{mm} = 0.945\text{mm}^2$) 而求得 $1560.85\text{N}/\text{mm}^2$ 的比切削能。而本文在0.6mm的切削寬度和0.2025mm的切削深度的模擬條件下，得到 $1360.08\text{N}/\text{mm}^2$ 的比切削能；與上述的實驗值比較，誤差為12.90%，尚在可接受的範圍。由此可證明本模式模擬所得的切削力和比切削能滿足斜交切削過程中的力學條件的要求。

伍、結 論

1. 建立三維刀面幾何限制方程式，作為限制切屑節點的流動路徑的依據。
2. 推導三維熱傳有限差分方程式來處理工件內部、刀具內部、切屑-刀具間以及工件一周遭空氣間之熱傳遞的問題。
3. 切屑流動角大小接近刀具傾斜角，符合Stabler's criterion的幾何要求。
4. 比切削能和實驗值比較，誤差在可接受的範圍內，滿足斜交切削過程中的力學條件的要求。

參考文獻

1. K. Meakawa, M. Maeda, Simulation analysis of three-dimensional chip formation processes-FEM formulation and a few results, J. Jpn. Soc. Precis. Eng. 59(11) (1993) 1827-1832.

- 2.M. Sasahara, T. Obikawa, T. Shirakashi, FEM analysis on three-dimensional cutting-analysis on large deformation problem of tool entry, J. Jpn. Soc. Prec. Eng. 59(8) (1993) 1275-1280.
3. K. Ueda, K. Manabe, Rigid-plastic FEM analysis of three-dimensional deformation field in chip formation process, Annals of the CIRP. 42 (1993) 35-38.
- 4.Yamada, Y., "Visco-elasticity plasticity,"Baifukan, Japan(1980).
- 5.Shirakashi, T., K. Maekawa and E. Usui, "Flow stress of low carbon steel at high temperture and strain rate,"Bull. Japan Soc.Prec. Engng. Vol.17, pp.167-172 (1983).
- 6.Boothroyd, G., "Fundamentals of Metal Machining and Machine Tool," McGraw-Hill BOOK COMPANY, pp.69-70 (1984).
- 7.Lin, Z.C., F.S. Chang and Y.T. Lin, "The effect of tool flank wear on the temperature distribution of a machined workpiece, "J. of the Chinese Institute of Engineer, Vol.10, No.4, pp.353-362 (1987).

表1 工件與刀具的熱性質

material	c(J/KgK)	ρ (Kg/m ³)	k(W/mK)
mild steel	461	7849	59.00
P20	234	12700	33.50

表2 切屑流動角的比較

dz" (mm)	dx" (mm)	chip flow angle ($\tan^{-1} dz''/dx''$)
-0.03688	-0.22468	9.32096 ⁰

表3 比切削能的比較

	cutting force (N)	width of cut(mm)	depth of cut(mm)	cross sectional area of uncut chip (mm ²)	specific cutting energy (N/mm ²)	error	note
experiment value	1475.0	3.5	0.27	0.945	1560.85		Lin, etc (7)
simulated value	165.25	0.6	0.2025	0.1215	1360.08	12.90%	

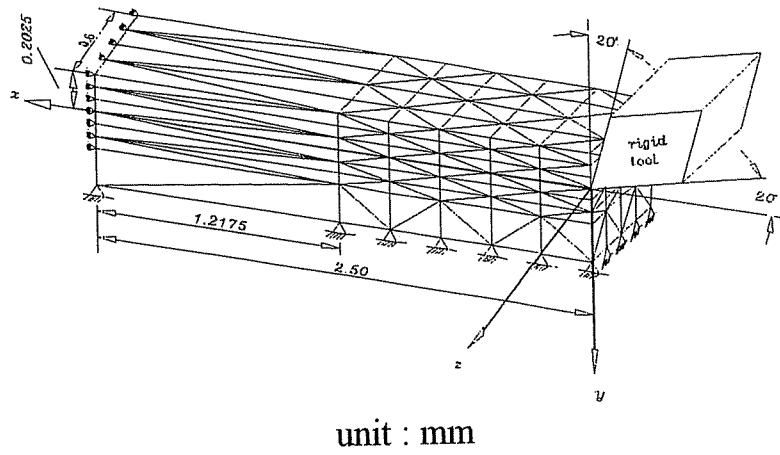


圖1 工件有限元素分割模式及邊界條件

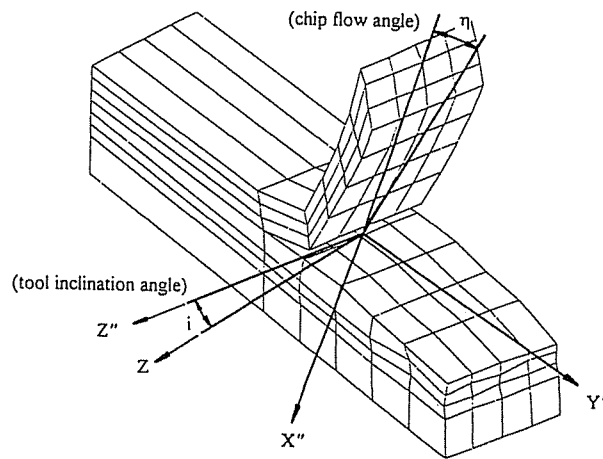


圖2 切削終了，切屑節點流線示意圖

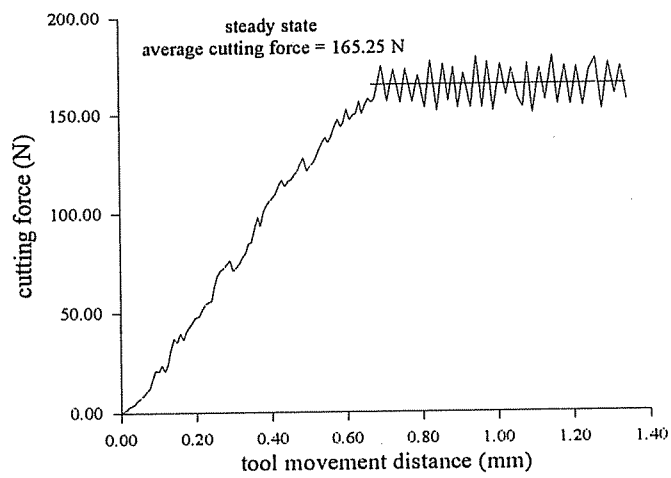


圖3 切削力變化歷程

A Thermoelastic-Plastic Finite Element Model for Oblique Cutting

Ship-Peng Lo Yeou-Yih Lin

ABSTRACT

This paper is based on large deformation-large strain theory, updated Lagrangian formulation (ULF), incremental theory and heat transfer finite difference method. It simulates from the incipient while tool contacts workpiece till formation of steady cutting force. During the chip formation, a tool face geometrical limitation equation is derived to constrain the chip nodes which flow through tool face. Then, a thermoelastic-plastic finite element model for oblique cutting is established.

The simulated chip flow angle is compared with the geometrical condition of Stabler's criterion, and the simulated cutting force and specific cutting energy are compared with the experimental values, the results are within an acceptable error. It proves the reliability in the geometrical condition and the mechanics.

Keywords : FEM, FDM for heat transfer, 3-D tool face equation, oblique cutting

