四海學報，第八期（八十二年九月）33～50
私立四海工商專校

以穩健推估法進行測量平差之研究

張裕民*

摘要

最小二乘推估法可在某些前提下得到最佳線性無偏估值，例如先行假設觀測量沒有大的誤差以及參數之估計爲隨機的等前提；但一旦觀測量含大的誤差，則將影響參數之估值。爲了克服此難題，本文建議採用穩健推估法來加以解決。文中推導穩健推估法之兩種型式之公式，提出其處理偵錯之步驟與計算，同時也比較穩健推估法與最小二乘推估法二者間之異同。

關鍵詞：穩健推估法，最小二乘推估法

*張裕民：土木科專任副教授

Journal of Szehai Junior College of Business & Technology, Vol.8 (Sep.1993) 33 ~ 50
Szehai Junior College of Business & Technology

Measurement Adjustment by Robust Collocation

Yu-Min Chang

ABSTRCT

The least squares (LS) collocation give the best linear unbiased estimate under some presuppositions. Both of the presuppositions are that the observations should not be contaminated by outliers and the random parameters to be estimated are stochastic. Once if the observations are contaminated by outliers, then the estimate of unknown parameters must be distored. To overcome this problem, a new approach named robust collocation be suggested in this paper. Two kinds of robustized collocation formula are derived. The procedure in robustifying the covariance function and the calculations of the robust collocation are discussed. The comparison between robust collocation and LS collocation is also shown.

Key words : robust collocation, least squares collocation

以穩健推估法進行測量平差之研究

張裕民

一、前言

Moritz(1980) 曾經成功地使用最小二乘推估法 (least squares collocation，簡寫爲 LS 推估法) 進行重力場的估計，顯示在某些前提下爲最佳線性無偏估值。此前提乃指最小二乘推估法中其觀測量不能有錯誤，否則其協變函數 (covariance function) 會產生偏差，而破壞未知數的推估。

意即最小二乘推估法之前提建立在觀測量沒有錯誤，而只有偶然誤差且呈標準常態分佈的情況。一旦觀測量有錯誤時，LS 法會將大部分的錯誤傳給未知數而僅少量傳給改正數，如此我們一向以 3 倍中誤差爲標準剔除觀測量的作法會有問題。

W. Baarda (1968) “Testing procedure for use in geodetic network” 提出可靠度和數據偵錯的觀念，可進行除錯的工作。但它的弱點在於它是建立在誤差傳播的基礎上，當一個錯誤太大或錯誤不只一個時，它的前提就不存在了。

爲了克服以上的問題，乃有穩健推估法 (robust collocation)，理論之產生，可處理多錯誤之偵錯。

本文先說明穩健推估法之處理方式，進一步比較穩健推估法與最小二乘推估法之異同。

二、文獻回顧

關於穩健推估法相關之研究著作有：

1. Huber (1981)：穩健統計 (robust statistics)。

2. Schaffrin (1985)：首先提出穩健推估法之構想。

3. Hampel, et al.(1986)：穩健統計應用於影響函數 (influence functions) 之方法。

4. Caspary & Borutta (1987), K. Kubik (1988), Robert G. Staudte (1990)：有關穩健估值法 (robust estimation) 之方法和步驟。

5. Yang Yuanxi (1992)：穩健推估法於物理大地測量之應用。

6. Y. Gao, et al. (1992)：穩健推估法除錯之處理步驟。

另外還有 V. Argeseanu (1986), Zhang Bingcal (1987) 等許多學者對穩健推估法提供了基本的理論。

三、穩健 M 估值 (Robust M-estimators)

最接近估值 (Maximum likelihood estimators) 可由最小二乘法定義常態分佈函數 $f(\ell, x)$ 推導而得。

$$\sum P_i V_i^2 = \sum f(\ell, x) \longrightarrow \min \tag{1}$$

式中 P_i 為觀測值 ℓ 之權，V_i 為殘差，x 為未知參數。

為滿足 (1) 式，應有如下之關係：

$$\sum \psi(\ell_i, x) = 0 \tag{1a}$$

式中

$$\phi(\ell, x) = \frac{\partial(f(\ell, x))}{\partial x} \tag{1b}$$

穩健 M 估值乃為一般化之最接近估值，可表之為：

$$\sum f(\ell_i - A_i x) = \sum f(V_i) \longrightarrow \min \tag{2}$$

經過微分

$$\sum A_i^t \psi(V_i) = 0 \tag{2a}$$

式中 A 為設計矩陣

令

$$P_i = \frac{\psi(V_i)}{V_i}, \qquad P = \mathrm{diag}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

則 (2a) 式可寫爲矩陣式

$$A^t P V = 0 \tag{2b}$$

利用最小二乘法得

$$\left.\begin{aligned} X_j &= (A^t P_j A)^{-1} A^t P_j L \\ (P_i)_{j+1} &= \frac{\psi(V_j)}{V_j} \\ P_{j+1} &= \mathrm{diag}(P_1, P_2, \ldots, P_n)_{j+1} \\ P_1 &= I, \quad j = 1, 2 \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

根據 Huber (1981) 之建議

$$f(V_i) = \begin{cases} \dfrac{V_i^2}{2} & , |V_i| \leq C \\ C|V_i| - \dfrac{C^2}{2} & , |V_i| > C \end{cases}$$

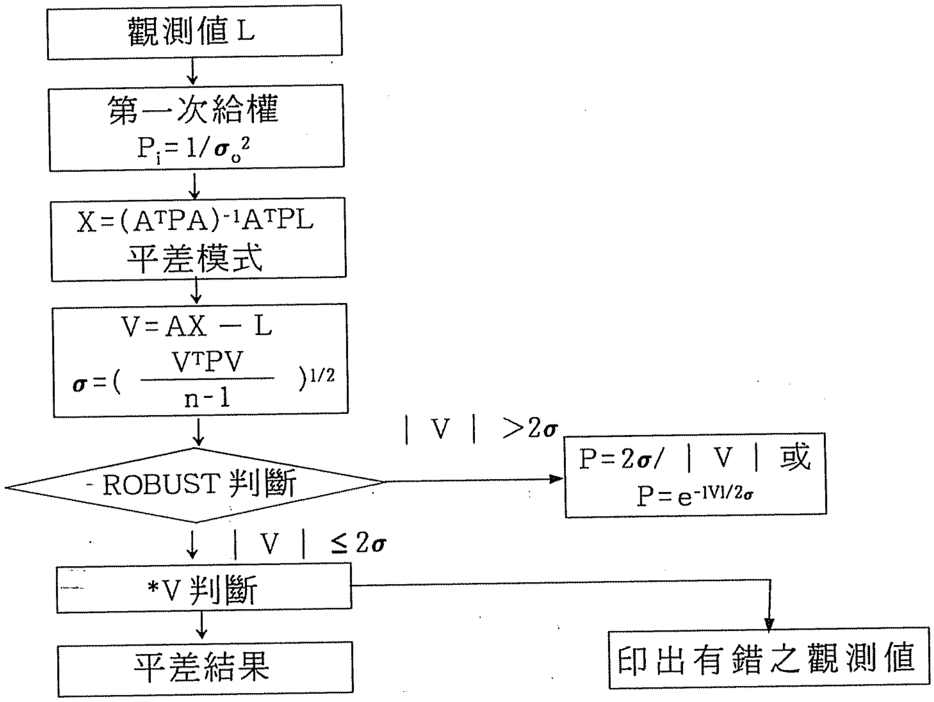
取 $C = 2\sigma$

$$\psi(V_i) = \begin{cases} V_i \\ 2\sigma \end{cases}, \quad P_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & , |V_i| \leq 2\sigma \\ \dfrac{2\sigma}{|V_i|} & , |V_i| > 2\sigma \end{array}\right\} \tag{3a}$$

另 Krarup(1980) 提出丹麥法 (the Danish method)

$$P_i = \begin{cases} 1 & , |V_i| \leq 2\sigma \\ e^{-|V_i|/2\sigma} & , |V_i| > 2\sigma \end{cases} \tag{3b}$$

綜合以上各式，整理穩健 M 估值流程如圖 1 。



*V 判斷表示判斷是否收斂（即相鄰二次計算之改正數已無明顯變化）

，此時權被降低之觀測值，其相應之改正數大約即爲錯誤的量。

圖 1 、穩健 M 估值流程圖

四、穩健推估法 (Robust Collocation)

利用穩健 M 估值可進一步發展爲穩健推估法。

依據 Moritz(1980)，一般 LS 推估法模式爲

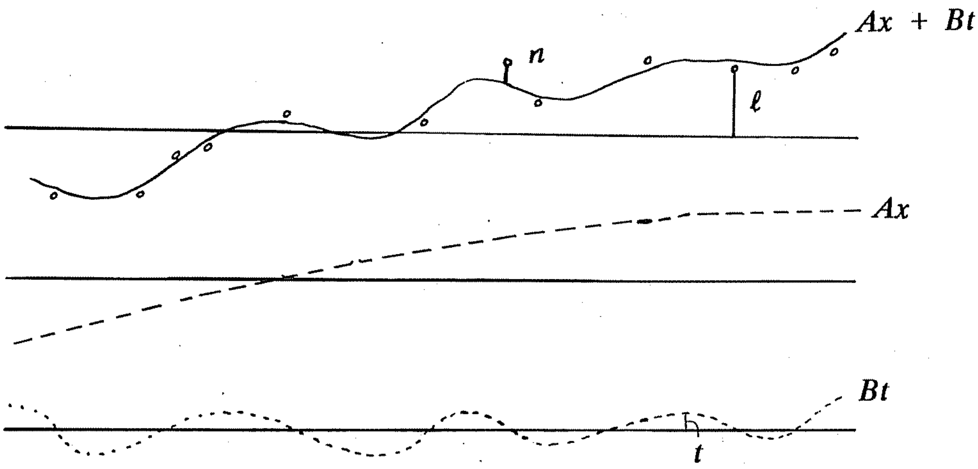
$$L = Ax + Bt + \Delta \tag{4}$$

式中 L 爲觀測量，A 爲設計矩陣 (design matrix)

x 爲未知參數，B 爲系統改正 t 之設計矩陣，

Δ 爲偶然誤差

Ax, Bt, Δ 之示意如圖 2



＊在物理大地測量中，$t=$ 位能異常 (anomalous potential)

圖 2 、 Ax,Bt,Δ 之示意圖

對應於 (4) 式之誤差方程式爲

$$V = A\hat{x} + B\hat{t} - L \tag{5}$$

爲了進行 LS 推估法，需滿足下列條件：

$$\Omega = V^T C_\Delta^{-1} V + t^T C_t^{-1} t = \text{minimum} \tag{6}$$

式中 C_Δ 爲 Δ 之協變矩陣 (Covariance matrix)， C_t 爲 t 之協變矩陣 (Covariance matrix)。

假設 Δ_i 不相關，且 $\sigma_0^2 = 1$，則 $P = C_\Delta^{-1}$， $P_t = C_t^{-1}$，而 LS 推估法的估值爲

$$\begin{bmatrix} A^T PA & A^T PB \\ B^T PA & B^T PB + P_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T PL \\ B^T PL \end{bmatrix} \tag{7}$$

上式之估值並非爲穩健的 (robust)，因爲任何一個錯誤皆會破壞其結果。爲了改進 LS 推估法中有偶然誤差 Δ 和系統改正 t 無法偵錯的缺點，乃提出 M 推估法 (maximum likelihood type estimation) 的處理方式。

假設 F_Δ, F_t 爲 Δ，t 的有錯分佈，ϕ_Δ、ϕ_t 爲 Δ，t 之常態分佈，H_Δ、H_t 爲 Δ, t 之系統分佈，$0 \leq \epsilon_\Delta < 1$，$0 \leq \epsilon_t < 1$，則

$$\begin{aligned} F_\Delta(\epsilon_\Delta) &= (1-\epsilon_\Delta)\phi_\Delta + \epsilon_\Delta H_\Delta \\ F_t(\epsilon_t) &= (1-\epsilon_t)\phi_t + \epsilon_t H_t \end{aligned} \tag{8}$$

將 (6) 式改寫爲

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} P_i V_i^2 + \sum_{j=1}^{m} \bar{t}_j^2 = \sum_{j-1}^{n} P_i \rho(V_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta(\bar{t}_j) = \text{minimum} \tag{9}$$

$$\left(\text{令} \quad \tilde{t}_j = (C_t^{-1/2} t)_j, \quad P_i\rho(V_i) = P_i V_i^2, \quad \beta(\tilde{t}_j) = \tilde{t}_j^2\right)$$

再將 Ω 對 x 及 t 微分得

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^T P_i \psi(V_i) = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_i^T P_i \psi(V_i) + \sum_{j=1}^{M} \eta(\tilde{t}_j) = 0 \tag{11}$$

式中

$$\begin{aligned} \psi(V_i) &= \frac{\partial \rho(V_i)}{\partial V_i} = \text{下降函數} \\ \eta(t_j) &= \frac{\partial \beta(\tilde{t}_j)}{\partial \tilde{t}_j} = \text{重複下降函數} \end{aligned}$$

例如 Huber 函數

$$\psi(V) = \begin{cases} V & , \quad |V| < C \\ C & , \quad |V| \geq C \end{cases}$$

令

$$P(V_i) = P_i \psi(V_i)/V_i \tag{12}$$

$$P(t_j) = \eta(t_j)/t_j \tag{13}$$

則 (7) 式變爲

$$\begin{bmatrix} A^T P(V) A & A^T P(V) B \\ B^T P(V) A & B^T P(V) B + P(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P(V) L \\ B^T P(V) L \end{bmatrix} \tag{14}$$

$P(V)$,$P(t)$ 稱爲等權矩陣。

在穩健推估法中 L_i 和 t_j 的影響函數 (Influence Functions，IF) 定義爲

$$IF(L_i, x, t) = \lim_{\varepsilon_\Delta \to 0} \frac{Z((1-\varepsilon_\Delta)\phi_\Delta + \varepsilon_\Delta H_\Delta) - Z(\phi_\Delta)}{\varepsilon_\Delta} \quad (15)$$

$$IF(\tilde{t}_j, x, t) = \lim_{\varepsilon_t \to 0} \frac{Z((1-\varepsilon_t)\phi_t + \varepsilon_t H_t) - Z(\phi_t)}{\varepsilon_t} \quad (16)$$

其中 $Z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$

而其對特定 L_i 和 t_j 之 IF 解爲：

$$IF(L_i, x, t) = M^{-1} \begin{bmatrix} a_i^T \\ b_i^T \end{bmatrix} p_i \psi(V_i) \quad (17)$$

$$IF(\tilde{t}_j, x, t) = M^{-1} \begin{bmatrix} c_T \\ e_j \end{bmatrix} \eta(\bar{t}_i) \quad (18)$$

式中

$$e_j = [\,0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1_j \;\; 0 \;\; 0\,]$$

$$M = \begin{bmatrix} A^T D_V A & A^T D_V B \\ B^T D_V A & B^T D_V B + C_t^{-1/2} G_t C_t^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 D_v 爲 $D_{vi} = E\{\psi'(v_i)\}$ 的對角矩陣， G_t 爲 $G_{tj} = E\{\beta''(\bar{t}_j)\}$ 的對角矩陣

五、穩健推估法之特例

(一)、M-LS 穩健推估法

當 L 含有錯誤而 t 爲常態，則其風險函數 (risk function)

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} P_i \rho(V_i) + \hat{t}^T C_t^{-1} \hat{t}/2 = \min \quad (20)$$

(20) 式稱爲 M-LS 穩健條件，因爲第一項爲 M 穩健函數而第二項爲 LS 函數。其 M-LS 估值爲：

$$\begin{bmatrix} A^TP(V)A & A^TP(V)B \\ B^TP(V)A & B^TP(V)B+P(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TP(V)L \\ B^TP(V)L \end{bmatrix} \tag{21}$$

其影響函數 IF 爲

$$IF(L_i, x, t) = M_I^{-1} \begin{bmatrix} a_i^T \\ b_i^T \end{bmatrix} p_i \psi(V_i) \tag{22}$$

$$IF(\tilde{t}_j, x, t) = M_I^{-1} \begin{bmatrix} O \\ e_j^T \end{bmatrix} (C_t^{-1/2}\hat{t})_j \tag{23}$$

$$\text{式中} M_I = \begin{bmatrix} A^TD_vA & A^TD_vB \\ B^TD_vA & B^TD_vB+C_t^{-1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

(二)、LS-M 穩健推估法

當 L 爲常態分佈 ,t 爲含有錯誤，此乃 Shaffrin(1985) 所提出，其條件式如 (25) 式

$$\Omega = V^TPV/2 + \sum_{j=1}^{m} \beta(\tilde{t}_j) = \min \tag{25}$$

(25) 式稱爲 LS-M 穩健條件 , 其估值爲

$$\begin{bmatrix} A^TPA & A^TPB \\ B^TPA & B^TPB+P(\hat{t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TPL \\ B^TPL \end{bmatrix} \tag{26}$$

式中 $P(\hat{t})$ 爲 $P(\hat{t}_j) = \eta(\tilde{t}_j)/\hat{t}_j, \eta(\tilde{t}_j) = \beta'(\tilde{t}_j)$ 之對角矩陣。 LS-M 之 IF 爲

$$IF(L_i, x, t) = M_{II}^{-1} \begin{bmatrix} a_i^T \\ b_i^T \end{bmatrix} p_i V_i \tag{27}$$

$$IF(\tilde{t}_j, x, t) = M_{II}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ e_j^T \end{bmatrix} \eta(\tilde{t}_j) \tag{28}$$

$$\text{其中} M_{II} = \begin{bmatrix} A^TPA & A^TPB \\ B^TPA & B^TPB+C_t^{-1/2}G_tC_t^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{29}$$

六、穩健推估法計算之注意事項

1. 第 (7)(14)(26) 式可以替代重複計算，假設 k 次之估值爲 $\hat{x}^k$,$\hat{t}^k$ 及 V^k, 則從第 (7) 式可得 $k+1$ 次的估值。

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P(V^k) L \\ B^T P(V^k) L \end{bmatrix} \tag{30}$$

式中

$$\begin{aligned} N_{11} &= A^T P(V^k) A, N_{12} = A^T P(V^k) B = N_{21}^T \\ N_{22} &= B^T P(V^k) B + C_t^{-1/2} P(\hat{t}^k) C_t^{-1/2} \\ V^k &= A\hat{x}^{\,k} + B\hat{t}^k - L \end{aligned}$$

2. 另外 ,Moritz(1980) 將第 (7) 式轉換爲

$$B = [F, O] \quad , \quad t = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad , \quad C_t = \begin{bmatrix} C_{S1} & C_{S1S2} \\ C_{S2S1} & C_{S2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

式中 $S2$ 爲預估系統改正之不明顯值

則 $k+1$ 次之穩健解爲

$$\hat{X}^{k+1} = -(A^T D^k A)^{-1} A^T D^k L \tag{32}$$

$$D^k = [P(V^k)^{-1} + F C_{S1} F^T]^{-1} \tag{33}$$

$$S_1^{k+1} = C_{S1} F^T \psi(V) \tag{34}$$

$$S_2^{k+1} = C_{S2S1} F^T \psi(V^k) \tag{35}$$

3. 第 (25) 式 (LS-M 穩健推估法) 之 $k+1$ 次的替代重複計算解爲

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{t} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} A^T PA & A^T PB \\ B^T PA & B^T PB + P(\hat{t}^k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T PL \\ B^T PL \end{bmatrix} \tag{36}$$

式中 $P(\hat{t}_i^k) = \eta(\tilde{t}_i^k)/\hat{t}_1^k$， $\hat{x}$ 之起始值爲 $\hat{x}_0 = (A^T PA)^{-1} A^T PL$， t 之起始值爲 $\hat{t}_0 = 0$

七、穩健推估法與傳統 LS 推估法之比較

1. 第 (7) 式爲 LS 推估法的估值，第 (14) 式爲穩健推估法的估值，二者形式皆相同，唯一的差異在 LS 推估法中的權矩陣 P 和 P_t 爲穩健推估法中等值權矩陣 $P(V)$ 和 $P(t)$ 所取代，就是此種取代使穩健推估法能抵抗錯誤的影響。

2. 如果將 ρ 與 β 函數選爲

$$\rho(V_i) = V_i^2 \tag{37}$$

$$\beta(\tilde{t}_j) = \tilde{t}_j^2 = (C_t^{-1/2}t)_j^2 \tag{38}$$

則 $$\sum_{i=1}^{n} P_i\rho(v_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i v_i^2 = V^T PV \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta(\tilde{t}_j) = t^T C_t^{-1} t \tag{40}$$

且其最小條件式 (9) 可寫爲 (6) 式。由此觀點，LS 推估法可視爲穩健推估法之特例。

3. 在穩健估值中的大部份 ψ 函數或等值權函數，其主要部份通常取爲 LS 權，例如 Huber 權函數 (Huber 1981)

$$P(V_i) = \begin{cases} P_i & ,|V_i'| = |V_i/\sigma_0| < C_0 \\ P_iC_0/|V_i'| & ,|V_i'| > C_0 \end{cases}$$

式中通常選 $C_0 = 1.5$。

其中大部份皆爲 LS 部份，僅有錯誤觀測量部份由穩健推估法所控制。

4. 影響函數 (IF) 亦能顯示 robust 與 LS 間之差異。LS 推估法之 IF 爲

$$IF(L_i, x, t) = M_{LS}^{-1} \begin{bmatrix} a_i^T \\ b_i^T \end{bmatrix} p_i V_i \tag{41}$$

$$IF(\tilde{t}_j, x, t) = M_{LS}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ e_j^T \end{bmatrix} (C_t^{-1/2} t_j) \tag{42}$$

式中 $$M_{LS} = \begin{bmatrix} A^TPA & A^TPB \\ B^TPA & B^TPB + P_t \end{bmatrix} \tag{43}$$

與 (17)(18) 式比較，知觀測量有錯誤時，LS 推估法的 IF 是不受限制，但穩健推估法的 IF 則取決於 $\psi(V_i)$ 及 $\eta(\tilde{t}_j)$ 函數，二者降低錯誤的影響量。

八、實例

採用模擬之控制網，如圖 3 ，該網平均邊長約 900 m，點位座標中誤差 $\sigma_N < 2$ mm, σ_E 2 mm。

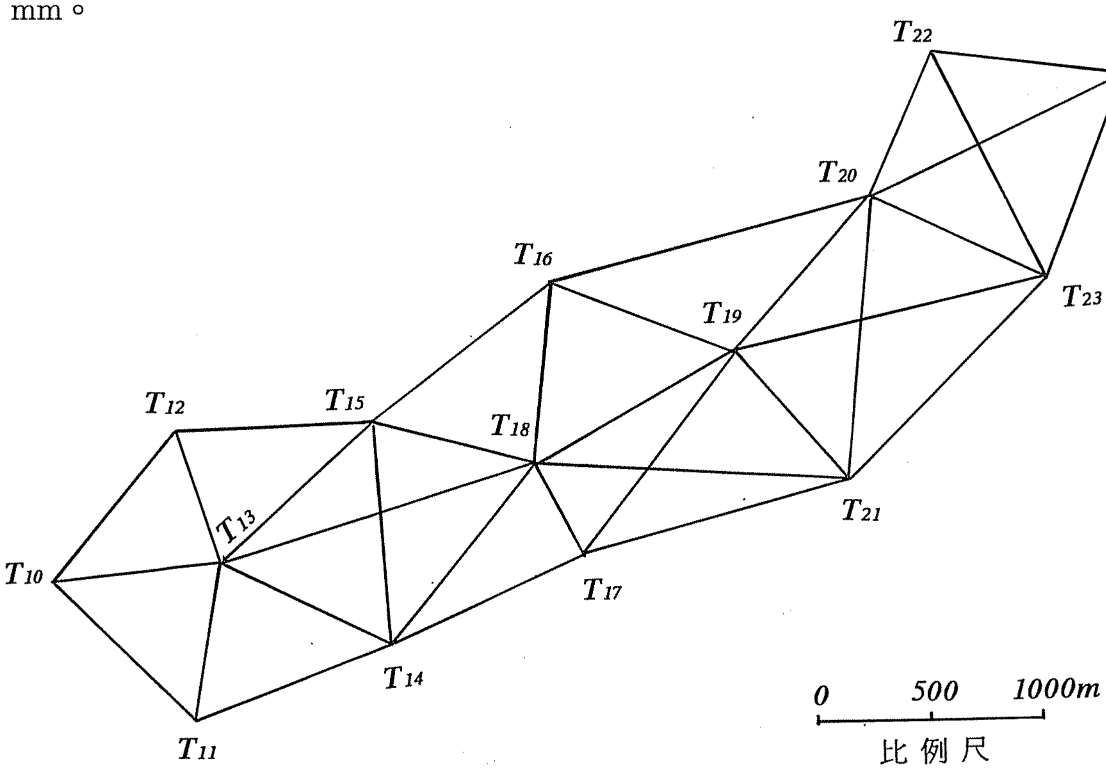


圖 3 、實測控制網分布圖

今模擬控制點 $T_{13}, T_{18}, T_{19}, T_{22}$ 之點位座標給予 1 ~ 6 cm 不等之誤差，經最小二乘推估法 (LS collocation) 與穩健推估法 (Robust collocation) 計算之結果，比較如表 1 。

表 1 、*LS* 推估法與穩健推估法計算結果比較

點位	模擬值 σ_E (cm) σ_N (cm)	LS 推估值 σ_E (cm) σ_N (cm)	穩健推估值 σ_E (cm) σ_N (cm)
T_{10}	— —	−0.22 −0.46	−0.02 −0.00
T_{11}	— —	−0.32 −0.41	−0.04 −0.23
T_{12}	— —	−0.50 −0.36	0.00 0.00
T_{13}	2.00 2.00	1.87 1.68	2.23 2.07
T_{14}	— —	−0.19 −0.24	−0.03 −0.02
T_{15}	— —	−0.45 −1.50	−0.25 −0.42
T_{16}	— —	0.10 −1.32	−0.04 −0.07
T_{17}	— —	−0.72 −0.33	−0.03 −0.12
T_{18}	3.00 —	1.45 −1.24	3.08 −0.12
T_{19}	4.00 6.00	3.05 4.84	3.74 6.25
T_{20}	— —	0.25 −0.77	−0.21 0.04
T_{21}	— —	−0.28 −0.74	0.05 0.09
T_{22}	1.00 3.00	1.25 −2.16	1.41 3.29
T_{23}	— —	−0.51 −0.72	0.02 0.05
T_{24}	— —	−1.14 −1.25	−0.41 −0.23

由表 1 可知：當模擬隨意給予之大誤差時，LS 推估法無法反應模擬值，而穩健推估法則與模擬值相當接近；故對於錯誤之偵測與正確未知參數之推估，以穩健推估法處理方爲有效。

九、結論與建議

1. LS 推估法無法偵錯，甚至只要有一個錯誤即可破壞 LS 解；本文所介紹的穩健推估法的確可偵出錯誤的觀測量，而其計算式與 LS 推估法相當接近。
2. 穩健推估法的步驟基於適當的等值權函數及需替代重複計算。
3. 影響函數的作用爲可顯示觀測量偶然誤差 Δ 與系統改正 t 在推估解上之影響。
4. 後驗的變方 — 協變矩陣、M 推估的演算和穩健協變函數的起始值等爲穩健推估法後續研究之方向。

十、參考文獻

1. Moritz, H, (1980), Advanced Physical Geodesy, Abacus Press, England.
2. Huber (1981), Robust Statistics. Wiley, New York.
3. Schaffrin (1985), On Robust Collocation. Proc. of the First Marussi Symp. on Math. Geodesy, pp.343-361.
4. Hampel, et al. (1986), Robust Statistics. the Approach Based on Influence Functions. Wiley, New York.
5. V. Agreseanu (1986), Three-Dimensional Adjustment of a Terrestrial Geodetic Network-a Collocation Solution. Aust J. Geod. Photogram. Surv, No.44 June, 1986, pp.1-37.
6. Zhang Bingcal (1987). A New Method of Data Snooping. Aust.J.Geod. Photogram. Surv. Nos46 & 47 ,December, 1987, pp.103-122.
7. Caspary & Borutta (1987), Robust Estimation in Deformation Models. Survey Review, Vol 29, No.223. pp.29-46.
8. K. Kubik (1988), Robust Estimation and DEM Data Compression. Aust. J. Geod. Photogram Surv. No.48 June, 1988.. pp.53-67.

9. Robert G. Staudte (1990), Robust Estimation and Testing, John Wiley & Sons, Inc. New York.

10. Y. Gao, E. J. Krakiwsky, and J. Czompo (1992), Robust Testing Procedure for Detection of Multiple Blunders. Journal of Surveying Engineering, ASCE, Vol. 118, No.1, February, pp.11-23.

11. Yang Yuanxi (1992), Robustifying Collocation, manuscripta geodaetica (1992) 17:pp.21-28.