大地起伏N值的求法及其在大地網計算之作用

張裕民

摘要

大地起伏N值是大地計算之所需，其求法包括天文、重力與衛星等方法。

本文先介紹求取N值三種方法的計算過程，並加以推論N值分別在一維、二維及三維空間之作用,俾在大地計算中予以參考。

ABSTRACT

The undulation N needs to be dealt with in geodetic computations. There are three methods, including astrogeodetic, gravimetric and GPS satellite methods, to abtain undulation N value.

In this paper, these methods of getting undulation N above metioned will be introduced first,and derivated the role of undulation N in 1D, 2D, and 3D geodetic networks, so the results can be as the references in geodetic computations.

一、前言

測定地面大地網的工作中，包括有天文、重力、衛星及一般的大地測量，由於不同的系統，觀測後的結果，必須化算至一共同的系統——參考橢球體中平差，大地起伏N值即為化算過程中所必需的數据。

天文方法可測定地面點位之絕對位置，並可決定大地水準面(Geoid)。一般經由測定天體之方位角，天頂距及時間，即可求得測站之絕對位置；但由於重力影響，所得之位置僅屬於地方天文座標(local coordinate, Φ, λ, A)。至於測定大地水準面方面，則必先求垂線偏差分量ξ，η，再利用方位角α求得垂線偏差ε，最後藉Helmert公式[1]求得大地起伏值N。

但由於天文方法費時費錢，一般採用重力方法測定大地化算所需的N。以重力方法求解大地起伏N，在重力點多且均勻分布時可以獲得很高精度。可惜台灣地區目前的重力資料不多也不均，尤其中央山脈及海域部分更為缺乏。在未全面施測之前，可利用全球定位系統(GPS)方法間接測定大地起伏N值。

本文先就以上N值的各種方法加以介紹，並進一步探討N值對大地網平差的作用。

二、N值的天文求法

大地水準面爲最接近平均海水面的地球重力場等位面，由大地水準面(Geoid)，橢球面(ellipsoid)及地表面(earth surface)可定義橢球高(h)，正高(H)及大地起伏值(N)，如圖1。

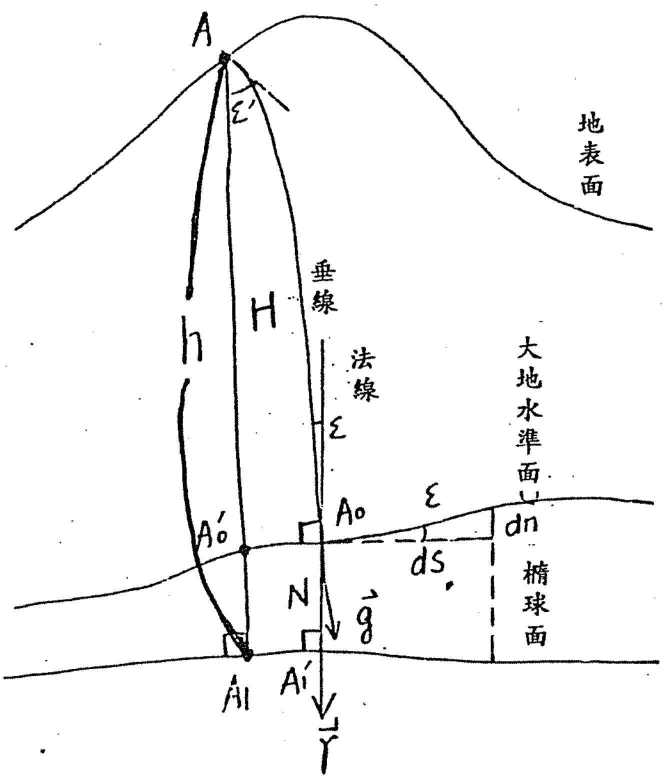

圖1 N之定義

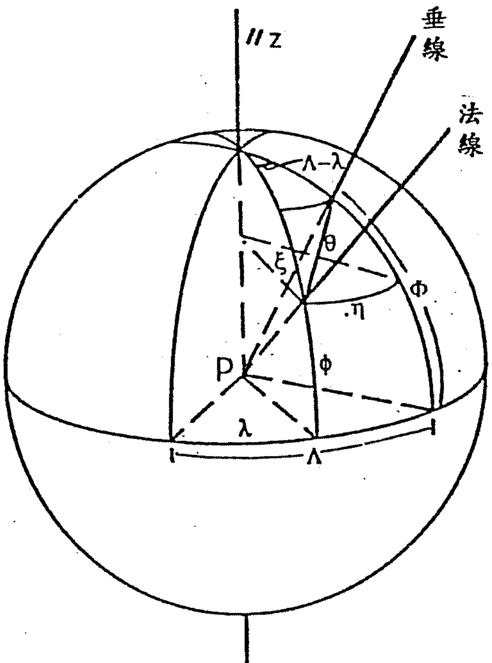

圖2 垂線偏差 ξ，η

大地水準面與橢球面之距離爲大地起伏N，地表面與橢球面之距離爲橢球高h，地表面與大地水準面之距離爲正高H(Orthometric Height)，三者之關係爲

$$N=h-H \tag{1}$$

大地水準面之法線AA_o與橢球面之法線AA_1之夾角ε'稱爲對應於A點之垂線偏差(deflection of the vertical)，ε'有二個分量ξ，η，定義如下：

南北分量 $\xi=\Phi-\phi$ (2)

東西分量 $\eta=(\Lambda-\lambda)\cos\phi$

式中Φ，Λ爲天文座標A點之緯度，經度，而φ，λ爲大地座標之緯度，經度。如圖2。

在方位角α處，ε'可表爲

$$\varepsilon'=\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha \tag{3}$$

爲了能夠直接將ξ，η關連到N，必須以ε取ε'。ε爲相應於大地水準面上之重力向量$\vec{g}$與法線向量$\vec{r}$之夾角，可應用垂線曲率化算ε'而得[Heiskanen and Moritz 1967,p.316]。

一二九

由圖1，可推導下列關係式

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}$$

$$\xi = -\frac{dN}{R d\phi} \qquad (4)$$

$$\eta = -\frac{dN}{R\cos\phi \, d\lambda}$$

上式的意義顯示垂線偏差 ε 爲大地起伏N之一次導數(斜率)，在平面座標系中 $R d\phi \doteq dy$ ，$R\cos\phi \, d\lambda \doteq dx$。

利用天文觀測可以決定 Φ，Λ，再由(2)式可計算 ξ，η，而由(4)式則可利用積分法得到N。

$$N_B \doteq N_A - \int_A^B \varepsilon \, ds \cong N_A - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}{2} \Delta S_i \qquad (5)$$

以上乃N之天文求法，由於費時費錢，因此採用經濟簡便的重力法求N較爲可行。

三、N值的重力求法

利用重力測量的資料，可以Stoke公式計算大地起伏N值。(Heiskanen & Moritz,1967)

$$N=\frac{R}{4\pi G}\iint_{\sigma}\Delta g.S(\psi)d\sigma \qquad (5)$$

式中

R=平均地球半經

G=全球重力平均值

Δg=重力異常

S(ψ)=Stoke函數

上式如果以球面座標來表示，可寫爲(參考圖3)

$$N=\frac{R}{4\pi G}\int_{\sigma=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)Sin\psi\, d\psi\, d\alpha \qquad (7)$$

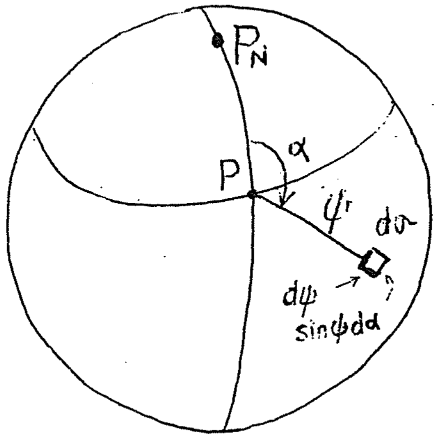

圖3 單位球體之極座標

理論上，Stoke公式所需的重力異常值必須涵蓋全球，實際上卻無法得到那麼多的資料。爲了解決資料不足的問題，Rapp(1986)發展360階球諧係數(Spherical Harmonic Coefficience)以局部重力資料計算大地起伏。

假設只有距離待算點ψ。範圍內之重力資料，則可將上式分成兩部分表示爲：

$$N=\frac{R}{4\pi G}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\psi_0}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)\mathrm{Sin}\psi\, d\psi\, d\alpha$$

$$+\frac{R}{4\pi G}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\psi=\psi_0}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)\mathrm{Sin}\psi\, d\psi\, d\alpha \qquad (8)$$

依Heiskanen & Moritz(1967)，上式之第二項可改寫爲

$$\frac{R}{4\pi G}\int_{d=0}^{2\pi}\int_{\psi=\psi_o}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)\mathrm{Sin}\psi\, d\psi\, d\alpha=\frac{R}{2G}\sum_{n=2}^{\infty}Qn.\Delta gn \quad (9)$$

(若最高階爲 n max，則∞以 n max代替)

式中

$$Qn=\int_{\psi}^{\pi}S(\psi)Pn(\mathrm{Cos}\psi)\mathrm{Sin}\psi\, d\psi$$

式中Pn=Legendre's Polynomials

$$\Delta gn=\frac{KM}{r^2}(n-1)\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}nm\ \mathrm{Cos}m\lambda+\bar{S}nm\ \mathrm{Sin}\ m\lambda)\bar{P}nm(\mathrm{Cos}\overline{\psi})$$

式中

K=萬有引力常數

M=地球質量

ψ，λ，r=待算點之緯度，經度及地心距

a=地球赤道半徑

一二五

$\bar{P}nm$=Fully Normalized Associated Legendre's Polynomials

$\bar{C}nm$,$\bar{S}nm$=完全正規化之諧係數

故得

$$N=\frac{R}{4\pi G}\iint_{\sigma}\Delta g S(\psi)d\sigma-\frac{R}{2G}\sum_{n=2}^{n\max}Q_n\ \Delta g_n \qquad (10)$$

上式之第一項由ψ_0範圍內之重力資料來計算，一般用同心圓法計算(Heisknanen &Moritz，P.117)；第二項則由諧係數計算。

四、GPS衛星測量間接測定大地起伏N值

大地起伏N，正高H，與由GPS衛星測量得到的幾何高h，三者有如(1)式的關係(參考圖1)：

$$N=h-H$$

因為同點之h與H之精度不易掌握，故利用P_1與P_2兩點正高差$\Delta H_{21}=H_2-H_1$與GPS測量所得兩點在WGS84座標系統下由1984橢球面起算之幾何高差$\Delta h_{21}{}^{84}=h_2{}^{84}-h_1{}^{84}$而得到大地起伏差$\Delta N_{21}{}^{84}$

$$\Delta N_{21}{}^{84}=\Delta h_{21}{}^{84}-\Delta H_{21} \qquad (11)$$

假設P_1點為基準點，在一地區內其他已知正高的水準點Pi上亦由GPS測量得其與P_1點之幾何高差Δhi_1，即可求得這些水準點對於P_1點的相對大地起伏ΔNi_1

$$\Delta Ni_1{}^{84}=\Delta hi_1{}^{84}-\Delta Hi_1{}^{84} \qquad (12)$$

一般的水準測量所求得的正高差可達公分之精度，而GPS測量若按相對定位法(DGPS)進行，其精度可達公寸級，故依誤差傳播定律估算大地起伏差$\Delta Ni_1{}^{84}$ 亦可達公寸級之精度。該精度不亞於重力法所得者，且較重力法方便，因此未來的發展頗具潛力。

五、N值在大地網平差之作用

(一)、1D大地網

1D大地網平差主要是處理正高H之水準網。

由(1)式得 $H=h-N$ 或 $\Delta H=\Delta h-\Delta N$ (13)

利用GPS衛星測量 Δh 之精度可達公寸級，ΔN 以重力法求得之精度 $\sigma_{\Delta N}$ 大約在公寸級，故以誤差傳播定律推算以 ΔN 間接求 ΔH 之精度亦在公寸級，此種精度對工程應用而言很有助益，尤其在實測水準不方便之處如高山，離島等可凸顯GPS法 Δh 配合重力法 ΔN 間接求 ΔH 之效益。

(二)、2D大地網

在2D大地網平差中，N值必須由地表面將距離化算至橢球體上，化算公式如下[Heiskanen and Moritz 1967]

距離 D_{AB} 之化算時，以正高H代替橢球高 $h=H+N$，因此需減去 ΔD_{AB}

$$\Delta D_{AB}=\frac{N_A+N_B}{2R}D_{AB} \tag{14}$$

圖4顯示(14)式計算出的最大作用值。

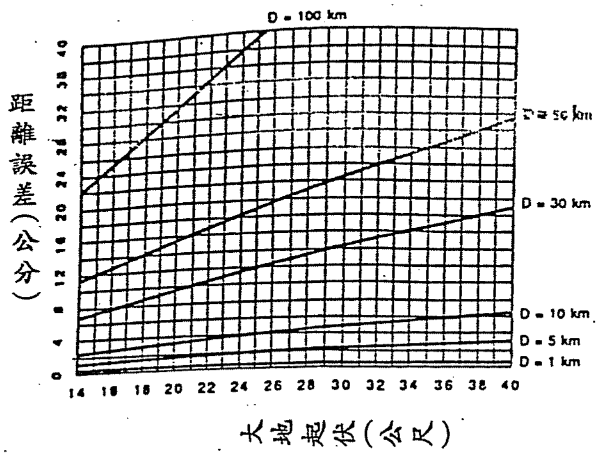

圖4 大地起伏之影響

利用誤差傳播定律可求得(14)式之標準誤差值。

$$\sigma_D^{NA} = \frac{D_{AB}}{2R}\sigma_{NA}，\quad \sigma_D^{NB} = \frac{D_{AB}}{2R}\sigma_{NB} \tag{15}$$

$$\sigma_d^{NA+NB} = \frac{D_{AB}}{2R}(\sigma_{NA}^2+\sigma_{NB}^2+2\sigma_{NA}\sigma_{NB})^{1/2} \tag{16}$$

當 $\sigma_{NA}=\sigma_{NB}=\sigma_N$， $\sigma_{NANB}=0$，則(16)式變成

$$\sigma_D^{NA+NB} = \frac{\sqrt{2}D_{AB}}{2R}\sigma_N \tag{17}$$

圖5顯示(17)式的結果。

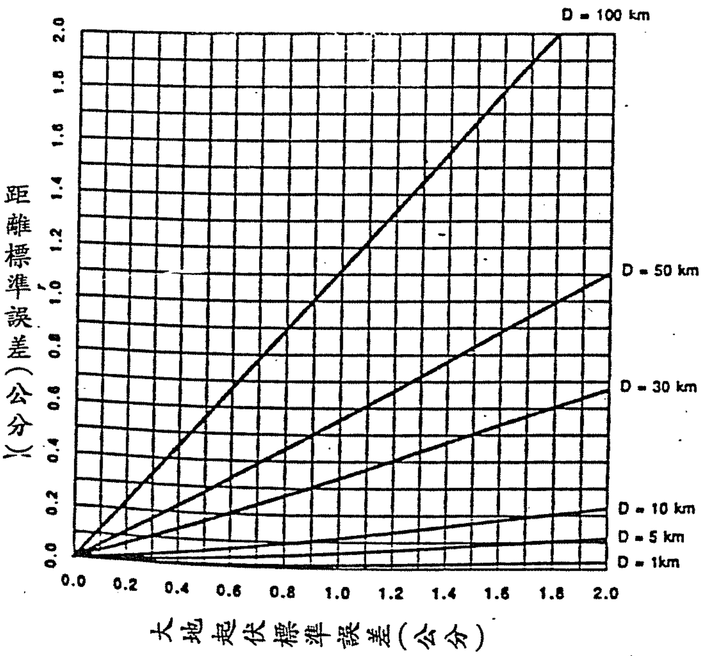

圖5 不同距離S，σ_N對σ_D之作用值

由圖4，圖5之分析可得：30m之大地起伏N，在10km之距離，其距離誤差約5cm；而大地起伏之標準誤差 $\sigma_N=\pm 1m$ 影響距離僅爲2cm之內(0.2ppm)，故知 $\sigma_N \leq \pm 1m$ 時已足夠作大地水準面至橢球面之化算。

（三）3D大地網

在3D大地網中，地方天文系統可用來連結天文和卡氏座標間之角度和距離測量，或者利用大地系統（ϕ，λ，h）也可連結3D觀測至大地座標，詳細數學關係式可參閱[Heiskanen and Moritz(1967), vanicek and Krakiwsky (1986)]。主要的觀測量爲水平方向角，天頂距、斜距、天文Φ，Λ和A；而未知數則包括ϕ，λ，h測站方向、垂直角折光改正、天文座標等。

因此，N在3D大地網平差中並未具作用。然而，在連結大地及天文座標系統時，N，ξ，η則使用於(1)(2)(3)(4)式來使Φ，Λ，H相關至ϕ，λ，h。

六、結論

經由本文之探討，彙整結論如下：

一、N值之求法有天文法，重力法及GPS法等多種方法。重力法決定N值較天文法經濟省時，且其精度足敷化算之需要。GPS法則利用衛星觀測間接測定N值，方便性佳，未來發展頗具潛力。

二、在重力法中，由2D大地網平差推算出N所需的精度爲 $\sigma_N \leq \pm 1m$。同樣地，也可擴展至1D的水準網及3D的地方座標系統。

三、N值之作用：在1D大地網中，可由測定之N值利用GPS法間接求正高；在2D大地網中，N值被用於距離化算所需(N=30m，在1km之距離時其距離誤差約5cm)；在3D大地網中，N值用於連結大地與天文座標系統。

七、參考資料

1.Heiskanen,W.A. and H. Moritz,(1967). Physical Geodesy, W.H. Freeman and Co., San Francisco.

2.Michael G. Sideris (1990). The Role of the Geoid in one-, two-, and three-Dimensional Network Adjustments. CISM Jornal ACSGC vol.44,No1,PP.9-18

3.Vanicek.P and E.Krakiwsky. (1986) Geodesy-The Concept,2nd ed. North-Holland Publishing Co. New York - Oxford.

4.Moritz,H(1980) Advanced Physeal Geodesy, Herbert Wichmann Velag,Karkruhe, Abacus Press,Tunbridge Wells, Kent.

5.Bomford (1971) Geodesy third edition. Oxfoord University Press.

6.Muller (1969),Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy.The Ohio State University.

7.Rapp,R.H. and Rummel,R.(1975), Methods for Computation of Detailed Geoids and Their Accuracy", Report No.233, Department of Geodetic Science,The Ohio State University.

8.Rapp,R.H. and J.Cruz,(1986),"Spherical Harmonic Expansions of the Earth's Gravitational Potential to Degree 360 Using 30' Mean Anomalies," Report No.376, department of Geodetic Science, The Ohio State University.