

# 以電腦求算Theis圖解法之流滯(Transmissibility)係數及滯蓄(Storage)常數

余 濬

## 摘要

Theis圖解法<sup>(1)</sup>求含水層之流通係數及滯蓄常數，因其為作圖法，求解之時不僅費時費力，且易趨向主觀，精確度也不高。而後有Jacob氏<sup>(2)</sup>修正Theis圖解法，於求解時化簡若干步驟，致較原法簡便，惟仍免不了作圖，同時其精確度也因步驟簡化而較差。本文提出以電腦求算Theis圖解法之步驟，可免去作圖，既省時省力且精確度非常高。

## 一、前言

Theis圖解法其理論為距離抽水井R處的觀測井，其洩降Z可表示如下：

$$Z = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(u)$$

此式即為有名之不平衡公式 (Unequilibrium equation)，或稱為西斯公式 (Theis formula)，式中Q表抽水井之抽水量，T為流通係數，S為滯蓄常數，t為抽水時間，其中 $u = SR^2/4Tt$ ；因 $\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ 為指數積分，通常寫為 $W(u)$ ，稱為u之水井函數 (Well Function)，可推演為級數如下：

$$W(u) = -0.577216 - \text{LOG}u + u - \frac{u^2}{2 \times 2!} + \frac{3 \times 3!}{u^3} - \dots + \frac{N \times N!}{u^N} \dots$$

不同之u及其相對應之 $W(u)$ 請參見附錄一水井函數表。

Theis圖解法其方法<sup>(3)</sup>、<sup>(4)</sup>、<sup>(5)</sup>為在透明雙對數格紙上，將水井函數 $W(u)$ 置

於縱軸，u置於橫軸，點繪出u與 $W(u)$ 之關係曲線，稱為標準曲線 (type curve)

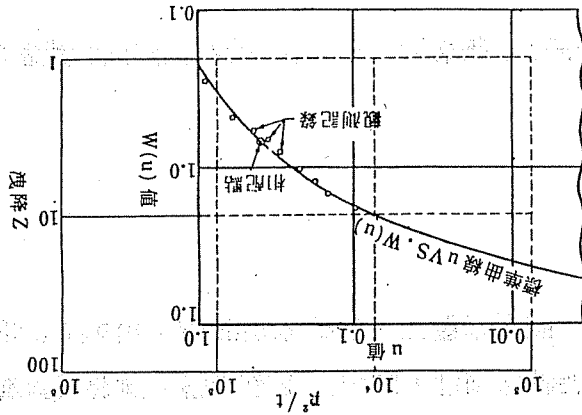
。再於相同大小座標之雙對數格紙 (透明與否皆可)，將觀測所得之洩降Z置於縱軸

## 二、電腦程式設計

(A)程式構想

- (1)輸入觀測井距離 R，抽水量 Q，抽水資料個數 N 及抽水之時間 T(1)、洩降 Z(1)，1=1, 2, 3...N。(時間 T(1) 及洩降 Z(1) 可不依大小順序排列)
- (2)將 Z(1) 及 R<sup>2</sup>/T(1) 分別取對數 LOG(以 e 為底)，並計算 LOG(R<sup>2</sup>/T(1)) 與 LOG(R<sup>2</sup>/T(1)) 之差為 L(1), 1=1, 2, 3...N，請參見圖 2。

圖 1

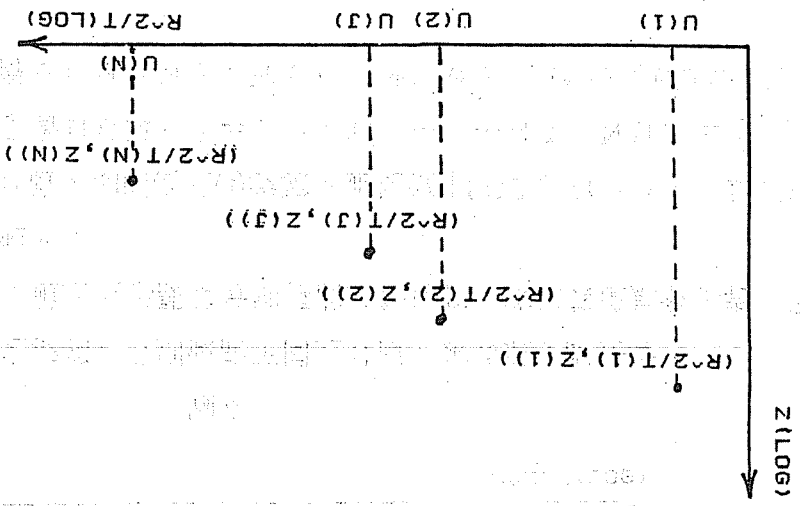


$$T = \frac{Q}{4\pi Z} W(u) \quad S = \frac{4Ttu}{R^2}$$

數 T 及儲蓄常數 S 為：

記下其匹配點 (match point) 之 u、W(u)、Z 及 R<sup>2</sup>/t 值，最後再求得流通係大部份之記錄點能與標準曲線某一段重合即停止並固定之 (示意圖請參見圖 1)，綫於 Z 及 R<sup>2</sup>/t 之座標上下左右平移 (縱軸平行縱軸，橫軸平行橫軸)，當平移至 R<sup>2</sup>/t 置於橫軸，分別點繪於紙上，得出 Z 及 R<sup>2</sup>/t 之關係曲綫。最後將標準曲

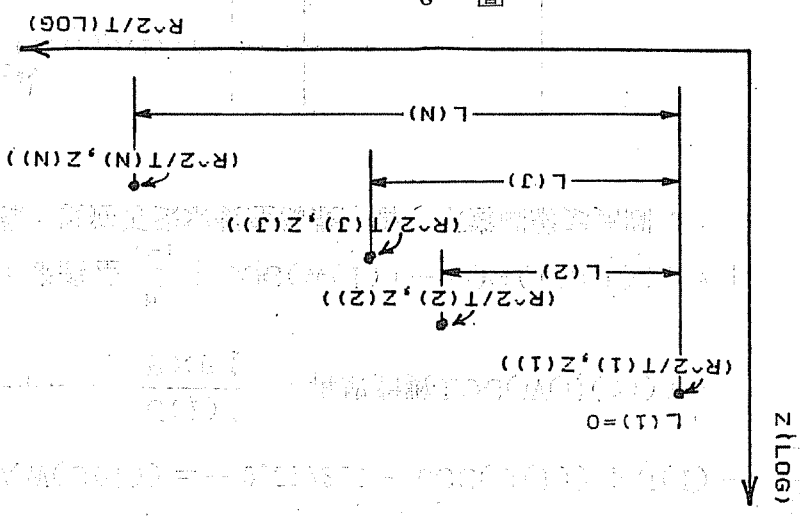
圖 3



圖請參見圖 3。

(3) 假設一  $u$  值，求  $U(1) = u \times L(1)$ ， $1 = 1, 2 \dots N$ ，目的在使  $\text{LOG}(U(1))$  之橫座標位置與  $\text{LOG}(R^2/T(1))$  一致，因為  $\text{LOG}(U(1)) + \text{LOG}(L(1)) = \text{LOG}[U(1) \times L(1)]$ ，亦即  $\text{Theis}$  圖解法中橫座標水平平移之步驟，示意

圖 2



$$T = \frac{4\pi Z(\text{NUM})}{Q} \cdot W(\text{NUM})$$

$$S = \frac{R^2}{4T \cdot T(\text{NUM}) \cdot U(\text{NUM})}$$

及

(10)最後計算：

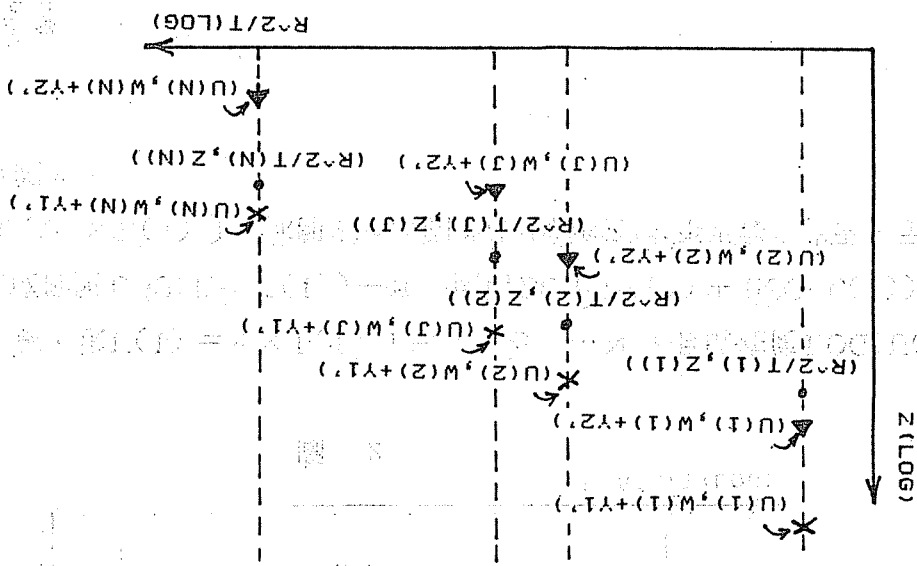
...N}，求得U(NUM)，W(U(NUM)，R<sup>2</sup>/T(NUM))及Z(NUM)  
+ Y | 之最小者 NUM (1 = 1, 2, 3, ...N)，NUM ∈ {1, 2, 3, ...

(9)將(8)求得之U值，如同(3)及(4)步驟，並比較 | LOG(W(1)) - LOG(Z(1)) | 誤差及該U值。

(8)將上述各個U值之最小誤差分別再做最後比較，找出其值為最小者，印出最小

(7)重複(3)至(6)之步驟，分別假設不同之U值，求其最小誤差者。

圖 4

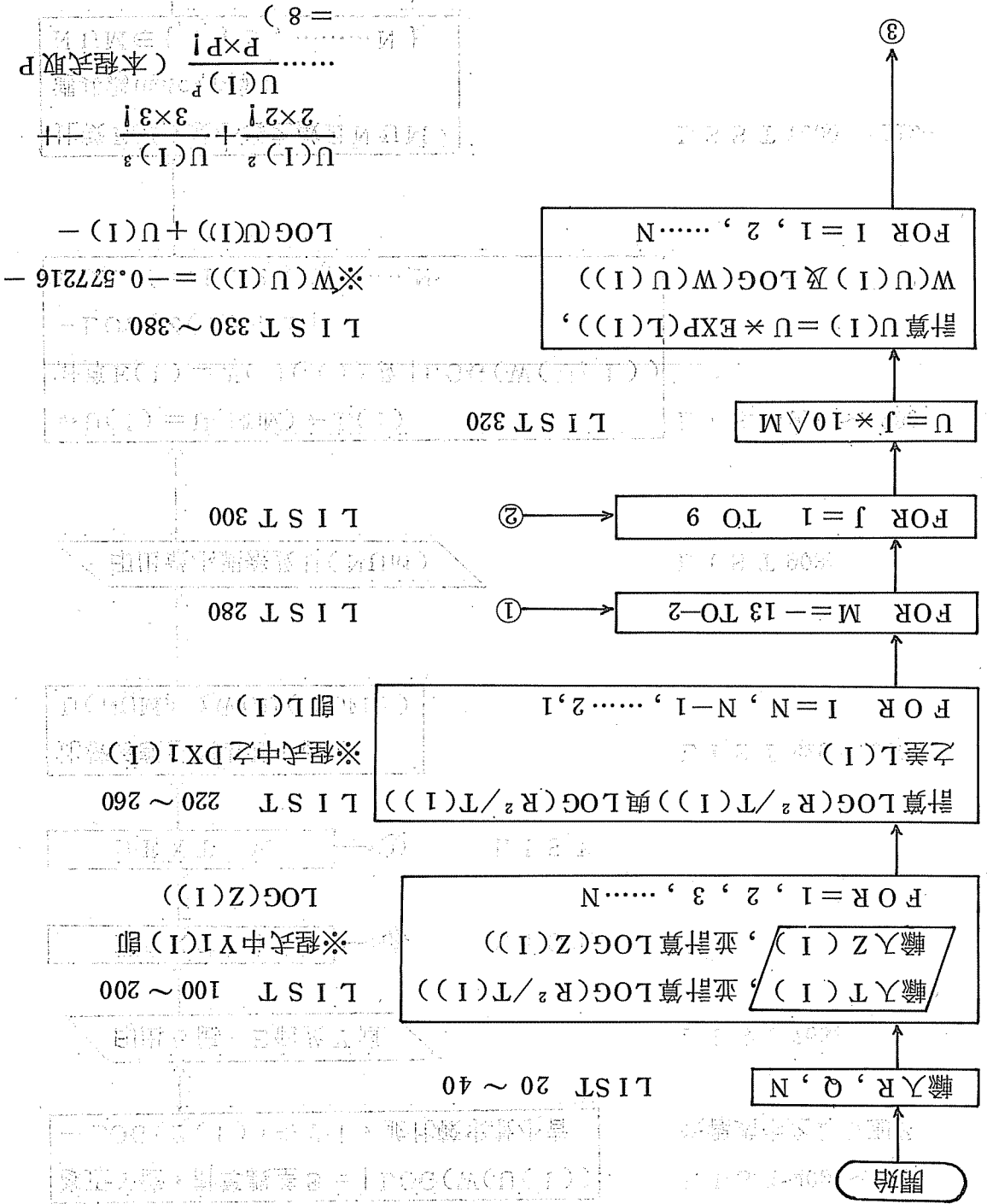


(6)重複(5)之步驟，以逼近法求誤差為最小者，示意圖請參見圖 4。

(5)假設一Y值，求誤差  $\sum_{i=1}^N | \text{LOG}(W(i)) - \text{LOG}(Z(i)) + Y |$ 。

$\frac{U(1)^3}{3 \times 3!} - \dots + \frac{U(1)^p}{p \times p!}$ ，再取對數  $\text{LOG}(W(U(1)))$ 。

(4)將U(1)代入  $\text{LOG}(U(1)) = -0.577216 - \text{LOG}(U(1)) + U(1) - \frac{U(1)^2}{2 \times 2!} +$





```

5 HOME
10 REM *****
11 REM "THEIR METHOD"
12 REM R UNIT IS "FT" OR "M"
13 REM S UNIT IS "FT/SEC" OR "M/SEC"
14 REM N IS NUMBER OF DATA
15 REM T(I) UNIT IS "HOUR"
16 REM Z(I) UNIT IS "FT" OR "M"
17 REM *****
18 REM "R="
19 INPUT "R=";R
20 INPUT "S=";S
21 INPUT "N=";N
22 INPUT "T(1) UNIT IS "HOUR"
23 INPUT "Z(1) UNIT IS "FT" OR "M"
24 REM *****
25 FOR I = 1 TO N
26 PRINT "T(I)=", INPUT T(I)
27 PRINT "Z(I)=", INPUT Z(I); PRINT
28 NEXT I
29 FOR J = 1 TO 2
30 FOR M = - 13 TO 13
31 FOR K = 1 TO 3
32 D(I,J) = X(I) - X(K)
33 NEXT J
34 NEXT I
35 FOR I = 1 TO N
36 D(I,N) = W(I)
37 PRINT "D(I,N)=", D(I,N); W(I)
38 NEXT I

```

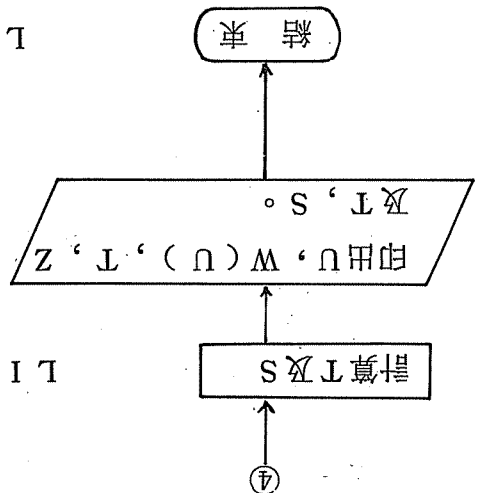
JPKEL657,80

(C)電腦程式

L I S T 9999

L I S T 1132 ~ 1210

L I S T 1122 ~ 1124









更進一步之探討。

差值變動範圍太大，其 J 值應再細分至小數點幾位，將會有更佳解，此部份有待 M = -13, -12, -11, ..., -3, -2, 由附錄二知當 M 愈大時，其誤 (3) 不同之 U 值，可用水井函數表中之 J × 10<sup>M</sup>，其中 J = 1, 2, 3, ..., 9, 本文其餘值取至 P = 8 精確度即已足夠 (參見附錄一水井函數表)。

當 U = 5 × 10<sup>-6</sup>, P 值需取至 22, W (U) = 0.00114  
 U = 6 × 10<sup>-6</sup>, P 值需取至 24, W (U) = 0.00036  
 U = 7 × 10<sup>-6</sup>, P 值需取至 27, W (U) = 0.00012  
 U = 8 × 10<sup>-6</sup>, P 值需取至 31, W (U) = 0.000037  
 U = 9 × 10<sup>-6</sup>, P 值需取至 33, W (U) = 0.000012

$\frac{U^P}{P \times P!}$  .....，其中 P 值當然愈大愈好。

(2) 水井函數 W (U) = -0.577216 - LOG(U) + U -  $\frac{U^2}{2 \times 2!} + \frac{U^3}{3 \times 3!} - + \dots$

真正最小者，請參見附錄二之 E 值。

(1) 不同 U 值之最小誤差，彼此之間變化並無規則可尋，故必需逐項比較，始可找出

### 四、結論與建議

S 相差範圍：  $1 - \frac{0.064}{0.072} = 11\%$

本法與作圖法其 T 相差範圍：  $1 - \frac{2124}{2573} = 17\%$

```

MIN ERROR = 1.21381725  U = .07
*****
MATCH POINT IS
U = .326
WUF = .823185863
T = 5 (HOUR)
Z = 2.3 (FT OR M)
*****
T. COEFFICIENT = 2572.64173 (FT2/DAY OR M2/DAY)
S. CONSTANT = .07203339683
*****
    
```

### 參考文獻

(4)由(2)知當U值大於 $9 \times 10^{-2}$ 時，W(U)值太小，故U值最大選用 $9 \times 10^{-2}$ （因再乘以L(1)後，U(1)值恐大於 $9 \times 10^{-2}$ ），U值最小選用 $9 \times 10^{-13}$ （因再乘以L(1)後，U(1)值恐小於 $1 \times 10^{-15}$ ）；如此抽水之最終觀測時間可為初終觀測時間之 $(9 \times 10^{-2}) / (9 \times 10^{-15}) = 100$ 倍。若最終之觀測時間較最初觀測時間大於100倍以上，則U值最大可選至 $9 \times 10^{-3}$ ，最小可選至 $1 \times 10^{-12}$ ，如此則可達1000倍。

1. Theis, C.V.: The Relation between the Lowering of the Piezometric

Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground

—Water Storage, Trans. Am. Geophys. Union, vol. 16, pp. 519 ~ 524,

1935。

2. Jacob, C.E.: Drawdown Test to Determine the Effective Radius of

Artesian Well, Trans. ASCE, vol. 112, pp. 1047—1070, 1947。

3. Viessman, Knapp, Lewis & Harbaugh: "Introduction to Hydrology"

, Second Edition, 1977。

4. 徐萬椿：“地下水學”，民國57年，徐氏基金會。

5. Linsley, Kohler & Paulms: "Hydrology for Engineers", Third

Edition, 1982。

U=1E-13 E=6.85074963 LL=-2  
 U=2E-13 E=7.96888791 LL=-2  
 U=3E-13 E=6.87902443 LL=-2  
 U=4E-13 E=6.88648287 LL=-2  
 U=5E-13 E=6.89706971 LL=-2  
 U=6E-13 E=6.89706971 LL=-2  
 U=7E-13 E=6.90111801 LL=-2  
 U=8E-13 E=6.90463819 LL=-2  
 U=9E-13 E=6.90774886 LL=-2  
 U=9.9999999E-13E=6.91053424 LL=-2  
 U=2E-12 E=6.92903061 LL=-2  
 U=3E-12 E=6.93997125 LL=-2  
 U=4E-12 E=6.97130085 LL=-2  
 U=5.9999999E-12E=7.01633033 LL=-2  
 U=7E-12 E=7.03362565 LL=-2  
 U=7.9999999E-12E=7.04868718 LL=-2  
 U=8.9999999E-12E=7.06203438 LL=-2  
 U=9.9999999E-12E=7.07402346 LL=-2  
 U=2E-11 E=7.15409276 LL=-2  
 U=3E-11 E=7.20192136 LL=-2

附 錄 二

0	1.0	0.219	1.82	4.04	3.35	2.96	0.70	0.0038	4.0
× 10 <sup>-1</sup>	1.82	1.22	0.91	0.70	0.56	0.45	0.00012	0.00038	9.0
× 10 <sup>-2</sup>	4.04	3.35	2.96	2.68	2.48	2.30	0.37	2.03	0.26
× 10 <sup>-3</sup>	6.33	5.64	5.23	4.95	4.73	4.54	4.39	4.26	4.14
× 10 <sup>-4</sup>	8.63	7.94	7.53	7.25	7.02	6.84	6.69	6.55	6.44
× 10 <sup>-5</sup>	10.95	10.24	9.84	9.55	9.33	9.14	8.99	8.86	8.74
× 10 <sup>-6</sup>	13.24	12.55	12.14	11.85	11.63	11.45	11.29	11.16	11.04
× 10 <sup>-7</sup>	15.54	14.85	14.44	14.15	13.93	13.75	13.60	13.46	13.34
× 10 <sup>-8</sup>	17.84	17.15	16.74	16.46	16.23	16.05	15.90	15.76	15.65
× 10 <sup>-9</sup>	20.15	19.45	18.76	18.54	18.35	18.20	18.07	17.95	17.95
× 10 <sup>-10</sup>	22.45	21.76	21.35	21.06	20.84	20.66	20.50	20.37	20.25
× 10 <sup>-11</sup>	24.75	24.06	23.65	23.36	23.14	22.96	22.81	22.67	22.55
× 10 <sup>-12</sup>	27.05	26.36	25.95	25.66	25.44	25.26	25.11	24.97	24.86
× 10 <sup>-13</sup>	29.36	28.66	28.26	27.97	27.75	27.56	27.41	27.28	27.16
× 10 <sup>-14</sup>	31.66	30.97	30.56	30.27	30.05	29.87	29.71	29.58	29.46
× 10 <sup>-15</sup>	33.96	33.27	32.86	32.58	32.35	32.17	32.02	31.88	31.76

水井函数表

附 錄 一

U=4E-11	E=7.23631528	LL=-2
U=4A,99999999E-11E=7.27057786	LL=-2	
U=5,99999999E-11E=7.30992486	LL=-2	
U=7E-11	E=7.34343415	LL=-2
U=7,99999999E-11E=7.37264276	LL=-2	
U=8,99999999E-11E=7.39854813	LL=-2	
U=9,99999998E-11E=7.42183487	LL=-2	
U=2E-10	E=7.57778093	LL=-2
U=3E-10	E=7.67129492	LL=-2
U=3,99999999E-10E=7.73871355	LL=-2	
U=4,99999999E-10E=7.79163624	LL=-2	
U=5,99999999E-10E=7.83529383	LL=-2	
U=6,99999999E-10E=7.87250329	LL=-2	
U=7,99999999E-10E=7.90495921	LL=-2	
U=8,99999999E-10E=7.93376191	LL=-2	
U=1E-09	E=7.95966704	LL=-2
U=2E-09	E=6.62680577	LL=-1.91
U=3E-09	E=6.63901961	LL=-1.8
U=4E-09	E=6.64770431	LL=-1.6
U=5E-09	E=6.65444863	LL=-1.5
U=6E-09	E=6.65996277	LL=-1.45
U=7E-09	E=6.66462652	LL=-1.44
U=8E-09	E=6.66966702	LL=-1.43
U=9E-09	E=6.67392823	LL=-1.42
U=1E-08	E=6.67435261	LL=-1.41
U=2E-08	E=6.67636211	LL=-1.4
U=3E-08	E=6.67856491	LL=-1.38
U=4E-08	E=6.67186737	LL=-1.37
U=5E-08	E=6.67695186	LL=-1.31
U=6E-08	E=6.679226639	LL=-1.3
U=7E-08	E=6.67338319	LL=-1.3
U=8E-08	E=6.6777257	LL=-1.3
U=9E-08	E=6.67121655	LL=-1.3
U=1E-07	E=6.67432498	LL=-1.3
U=2E-07	E=6.67142249	LL=-1.21
U=3E-07	E=6.67577157	LL=-1.2
U=4E-07	E=6.67371121	LL=-1.2
U=5E-07	E=6.67583539	LL=-1.14
U=6E-07	E=6.67461394	LL=-1.13
U=7E-07	E=6.67665921	LL=-1.13
U=8E-07	E=6.67182384	LL=-1.11
U=9E-07	E=6.670512031	LL=-1.11
U=1E-06	E=6.67777551	LL=-1.11
U=2E-06	E=6.673131329	LL=-1.103
U=3E-06	E=6.67330853	LL=-1
U=4E-06	E=6.673881235	LL=-1
U=5E-06	E=6.67292369	LL=-1
U=6E-06	E=6.674605733	LL=-1
U=7E-06	E=6.674632336	LL=-1
U=8E-06	E=6.675051701	LL=-1
U=9E-06	E=6.673521587	LL=-1
U=1E-05	E=6.67552926	LL=-1
U=2E-05	E=6.672705577	LL=-1
U=3E-05	E=6.672391094	LL=-1
U=4E-05	E=6.67607631	LL=-1
U=5E-05	E=6.673967916	LL=-1
U=6E-05	E=6.673432229	LL=-1
U=7E-05	E=6.67566187	LL=-1

MIN ERROR = 1.2158125 U = .07  
 \*\*\*\*\*  
 MATCH POINT IS  
 U=133  
 U=8218563  
 T=5 (HOUR)  
 T=3.317 OR M)  
 \*\*\*\*\*  
 T COEFFICIENT=2572.54173 (TIME/DAY OR HOURS/DAY)  
 S. CONSTANT=.0720327693  
 \*\*\*\*\*

U=8E-02	E=6.96712524	LL=-1
U=7E-02	E=7.05025214	LL=-1
U=7E-04	E=7.10868668	LL=-1
U=2E-04	E=5.9238136	LL=-.5
U=2E-04	E=5.711599	LL=-.43
U=1E-04	E=5.6008663	LL=-.4
U=2E-04	E=5.60861305	LL=-.24
U=6E-04	E=5.55493084	LL=-.31
U=7E-04	E=5.52636456	LL=-.3
U=8E-04	E=5.50944659	LL=-.3
U=9E-04	E=5.4816277	LL=-.23
U=1E-02	E=5.39445829	LL=-.21
U=2E-02	E=5.14238508	LL=-.1
U=3E-02	E=4.82766049	LL=0
U=4E-02	E=4.62812144	LL=0
U=5E-02	E=4.62381256	LL=0
U=6E-02	E=4.6160007	LL=0
U=2E-02	E=5.09276361	LL=0
U=5E-02	E=5.32327284	LL=0
U=8E-02	E=5.52544681	LL=0
U=9E-02	E=5.71042078	LL=0
U=01	E=6.02592919	LL=.68
U=02	E=6.28110012	LL=.88
U=04	E=1.6028132	LL=1
U=06	E=3.02442142	LL=1
U=07	E=4.42400260	LL=1
U=07	E=1.21581255	LL=1.8
U=08	E=1.46515451	LL=1.8
U=09	E=1.76989627	LL=1.7