

調頻釘波雜訊的功率頻譜密度計算機模擬

饒達權

德霖技術學院 電子科講師

摘要

衛星電視波道通常使用多重的副載波，而且是屬於較高基帶的信號 (FM=4.5M Hz)，在這個頻率下，現今釘波雜訊的模型是無法很正確的描述 FM 邊限的效應。

在此文獻裡，我們模擬在調頻鑑別器輸出端的雜訊而是在低於臨界邊限的情況下，同時改進釘波雜訊的模型和其數學式子。

我們導出與載波雜訊比 (CNR) 有關的釘波雜訊隨機變數的或然率密度，同時隨後我們亦討論基本波段信號為弦式調變，和高斯調變的釘波雜訊效應。

最後我們將導出 $m(t)=0$, $m(t)$ 為弦式調變， $m(t)$ 為高斯調變信號的功率頻譜密度。

Simulation of FM-click Power Spectrum Density

Dar-Chyuan Rau

Lecturer of Electronic Engineering Department

Abstract

Satellite television channels often employ multiply subcarrier utilizing higher baseband frequencies. At these frequencies conventional click models fail to describe the FM-threshold effect accurately.

In this paper, a method of simulating the noise at the output of an FM-discriminator, working at or below threshold, is proposed. Using this method, an improved model to describe the shape of clicks is derived.

The probability densities of the random variables of the click model are presented and the parameters of these densities are related to the carrier-to-noise ratio present at the input of the discriminator. The effects of modulation are subsequently investigated.

Finally, an expression for the power spectral density of clicks is derived and evaluated.

導論

頻率調變是非常廣泛的使用在衛星電視信號的傳輸上，但是在調頻的臨界效應在文獻上 [1,2,3] 被討論到，在此文獻中，FM 鑑別器所輸出的雜訊被數值模擬的方法，將被提出，同時將導出基本波段信號 $m(t) = 0$ ， $m(t)$ 為弦式調變， $m(t)$ 為高斯調變的釘波雜訊功率譜密度將被討論到。

釘波雜訊的定義和計算機模擬[4]

一個未經調變的載波伴隨著有限帶寬穩定的高斯雜訊在調頻鑑別器的輸入端，可以用同相 $I(t)$ 和正交相 $Q(t)$ 來表示雜訊 $N(t)$ ，附加著載波的振幅 A_c ，所以這綜合的信號可以被思考為以 ω_c 的速度環繞著原點 O 在旋轉，圖-1 表示載波 A_c 和雜訊 $N(t)$ 的相對關係。

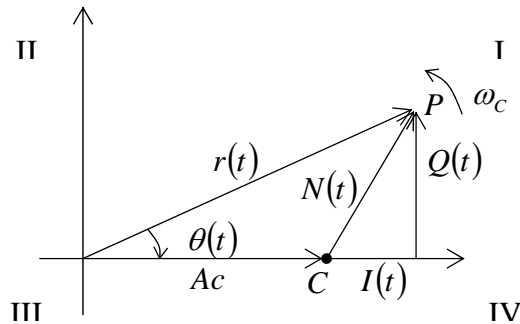


圖-1

調頻鑑別器的輸出將會等於相角的微分：

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \frac{Q(t)}{Ac + I(t)} \dots\dots\dots (1)$$

因為較高的載波對雜訊的比，P 點將會逗留在 C 的附近，(1) 的計算可以大約為(2)式：

$$\frac{d\theta(t)}{dt} \cong \frac{1}{Ac} \frac{dQ(t)}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

所以產生有名的三角形波模型，但是當載波雜訊比減少時，P 點環繞原點的或然率會比較有意義，在這區域就是我們所熟知的調頻的臨界的開始，P 點將會環繞著原點 O ，而且非常接近原點 O ，所以導致一個像脈衝的信號在鑑別器的輸出端，這就是我們所熟知的釘波雜訊。

在參考文獻[5]中，對於釘波雜訊每秒鐘出現的次數如下：

當 $m(t) = 0$ ，釘波雜訊出現的個數：

$$V = \frac{B}{2\sqrt{3}} \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{f_M}{B}\right) \left(\frac{S_i}{N_M}\right)} \dots\dots\dots (3)$$

f_M : FM 基帶信號的頻寬
 V : 每秒鐘出現的釘波雜訊的個數
 B : FM 信號的頻寬
 S_i : 輸入信號的功率
 N_M : 輸入信號的雜訊功率

$$\beta = 2(1 + \beta)f_M \dots\dots\dots (4)$$

B : 為 FM 信號的調變指數

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2/2) du = 1 - \operatorname{erf}(x) \dots\dots\dots (5)$$

$$N_i = \eta f_M \dots\dots\dots (6)$$

$\eta/2$: 為白色雜訊的功譜密度

$m(t)$ 為弦式調變時，釘波雜訊出現的個數[5]：

$$V = \frac{2\beta f_M}{\pi} \exp[-(f_M/B)(S_i/N_i)] \dots\dots\dots (7)$$

$m(t)$ 為高斯調變時，釘波雜訊出現的個數[5]：

其中 V 是指不論 $m(t) = o$ ， $m(t)$ 為弦式調變， $m(t)$ 為高斯調變時釘波雜訊產生的基本原則， $r(t)$ 的末端，在某時段內，繞原點一週， $\theta(t)$ 在這時段內改變了 2π 弧度， $\theta(t)$ 由 0 改變至 2π ，其中 $\frac{d\theta}{dt}$ 只有一個由逐漸增加改為逐漸減小的轉折區域，產生面積為 2π ，每秒鐘的個數[5]，與[4]中二連雙邊指數釘波雜訊亦是 $r(t)$ 的末端，繞原點旋轉一週， $\theta(t)$ 由 0 改變至 2π ，但是 $\frac{d\theta}{dt}$ 卻有二個逐漸增加改為逐漸減少的轉折區域，致使 0 至 2π 之間有二個釘波，其總面積為 2π 的二連雙邊指數釘波雜訊，是故二者皆符合釘波雜訊的基本定義，因此[5]之公式可以代入[4]來使用，另有一種 $r(t)$ 的末端，不繞原點，環繞一週的三組釘波雜訊，其總面積為零，其頻譜並不在，輸出最高輸出頻率 f_m 以內，所以三組釘波雜訊忽略不予計算。

$$V = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\Delta frms) \right) \exp[-(f_M/B)(S_i/N_i)] \dots\dots\dots (8)$$

$\Delta frms$: 為頻率偏逸的均方根值

$$\Delta frms = \frac{B}{4.6} \dots\dots\dots (9)$$

旋轉半徑 $r(t)$ 被從低頻雜訊 $W(f-f_c)$ 來計算[4]：

$$r(t) = \int_0^{\infty} (f - f_c)^2 w(f - f_c) df = \frac{B}{2\sqrt{3}} \dots\dots\dots (10)$$

$r(t)$: 旋轉半徑

釘波雜訊的計算機模擬

白色或是彩色有限頻寬固定的高斯雜訊能夠被表示為許多弦式波形之和[3]，以下面(11)，(12)式來表示如下：

因此低頻雜訊 $N(t)$ ，可以由同相分量 $I(t)$ 和正交分量 $Q(t)$ 來表示：

$$I(t) = \sum_{k=-M}^{M-1} a_k \cos \left[2\pi \left(\frac{f_s}{2} + k f_s + \Delta f \right) t + \Phi_k \right] \dots\dots\dots (11)$$

$$Q(t) = \sum_{k=-M}^{M-1} a_k \sin \left[2\pi \left(\frac{f_s}{2} + k f_s + \Delta f \right) t + \Phi_k \right] \dots\dots\dots (12)$$

$2M$ 為弦波的個數。

a_k ：弦式波形的振幅（對一個中頻濾波器 $a_k = a = \text{常數}$ ）

ϕ_k ：弦式波形最初任意的相位。

f_s ：間隔頻率 $f_s = \frac{B}{2M}$

Δf ：對於調變信號頻率偏逸量。

對於未調變信號 $\Delta f = 0$ ，CNR=0,1,2,3,4,5,6,7dB 代入(11),(12)式，對於調變信號 $\Delta f = 0.1r(t) \sim \Delta f = 0.6r(t)$ CNR=4dB 代入， $M \rightarrow \infty$ 時， $I(t)$ ， $Q(t)$ 為高斯或然率密度，在此計算機模擬 $M=100$ ，可以得到所希望的正確程度。

計算機模擬的結果

4.1 大部分釘波雜訊當 $f_M = 4.5\text{MHz}$ 為二相連雙邊指數型式，以(13)式和圖 2 和圖 3 來表示：

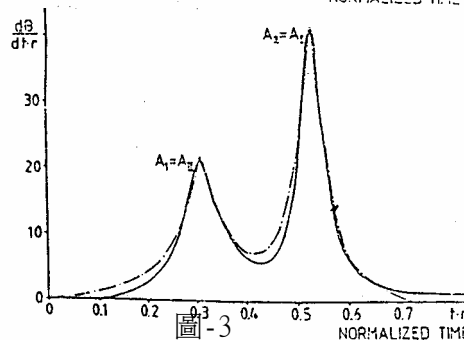
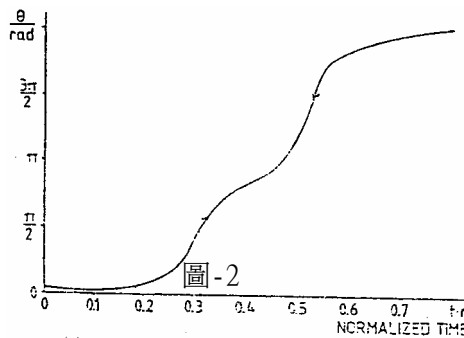


圖 2 是釘波雜訊 $\theta(t)$ 中之 $r(t)$ 環繞原點由 0 至 2π ，旋轉一週 2π 的相位圖，其中有二個 $\frac{d\theta}{dt}$ 由漸增改為漸減，漸減改為漸增的轉折處，是故 $\frac{d\theta}{dt}$ 產生一個二相連雙邊指數釘波雜訊，如圖 -3。

$$\frac{d\theta}{dt} = A_1 \exp(-2A_1|t-t_1|/\pi) + A_2 \exp(-2A_2|t-t_1-T|/\pi) \dots\dots\dots (13)$$

t_1 : 表示最初最大值的時間。
 T : 兩個最大值之間的時間距離。
 A_1 和 A_2 表示二個最大值的波峰。

$$F[e^{-b|t|}] = \frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2} \dots\dots\dots(14)$$

$$F[v(t - td)] = V(f)e^{-j\omega d} \dots\dots\dots(15)$$

則

$$F[f(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} A_1 \exp(-2A_1|t|/\pi) e^{-j\omega t} dt = \frac{\pi}{1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_1}\right)^2} = F(\omega) \dots\dots\dots(16)$$

$$|F(\omega)|_{\omega=0} = \pi \dots\dots\dots(17)$$

今令 $t_1 = 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = A_1 \exp(-2A_1|t|/\pi) + A_2 \exp(-2A_2|t - T|/\pi) \dots\dots\dots(18)$$

$$F\left[\frac{d\theta}{dt}\right] = \frac{\pi}{1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_1}\right)^2} + \frac{\pi}{1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_2}\right)^2} e^{-j\omega T} \dots\dots\dots(19)$$

$$\left|F\left[\frac{d\theta}{dt}\right]\right|^2 = \frac{\pi^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_1}\right)^2\right]^2} + \frac{\pi^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_2}\right)^2\right]^2} + \frac{2\pi^2 \cos \omega T}{\left[1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_1}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega\pi}{2A_2}\right)^2\right]} \dots\dots\dots(20)$$

$$P(T) = \begin{cases} P(T=0)\delta(t) + (1 - P(T=0)) \frac{C_T^{1.5} T^2}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-C_T T^2}{8}\right), & T \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots(21)$$

$$P(A_i) = \begin{cases} C_{A_i} \exp[-C_{A_i}(A_i - A_{Si})], & A_i \geq A_{Si} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots(22)$$

$i = I \text{ or } II$

4.2 當 $m(t) = 0$ 時

$$P(T = 0) = 0.1936 + 0.02148 \text{ CNR}/dB$$

$$C_T = 40.61 + 73.98 * 10^{\text{CNR}/10dB}$$

$$A_{SI} = 13.71 + 1.012^{\text{CNR}/dB}$$

$$C_{AI} = 0.02676 - 0.0009821^{\text{CNR}/dB}$$

$$A_{SII} = 2.850 - 0.06929^{\text{CNR}/dB}$$

$$C_{AII} = 0.07212 - 0.001940^{\text{CNR}/dB}$$

4.3 當 $m(t)$ 為弦式調變時

$|\overline{\delta f}|$: 弦式調變平均頻率偏移

$\Delta f'$: 調頻信號的最大頻率偏移

$$\Delta f' = \beta f_M \dots\dots\dots(23)$$

$$|\overline{\delta f}| = \frac{2}{\pi} \Delta f' \dots\dots\dots(24)$$

$$\frac{\Delta f}{r} = \frac{|\overline{\delta f}|}{r} = \frac{\frac{2}{\pi} \Delta f'}{r} = \frac{\frac{2}{\pi} \beta f_M}{\frac{B}{2\sqrt{3}}} = \frac{\frac{2}{\pi} \beta f_M}{\frac{2(1+\beta)f_M}{2\sqrt{3}}} = 1 \bullet 1 \frac{\beta}{1+\beta} \dots\dots\dots(25)$$

$$P(T=0) = 0.2795 + 0.877 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$C_T = 226.4 - 52.25 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$A_{SI} = 17.76 - 5.5946 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$C_{AI} = 0.02283 + 0.0080773 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$A_{SH} = 2.573 - 1.6346 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$C_{AH} = 0.6436 + 1.4102 \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$V = \frac{2\Delta f'}{\pi} \exp\left(\left(-\frac{f_M}{B}\right) * CNR\right) = 0.6366 \beta f_M \exp\left(\left(-\frac{f_M}{B}\right) * CNR\right) \dots\dots\dots(26)$$

CNR : 輸入信號雜訊功率比

[4] 中模擬的條件為 $CNR_{DB} = 4dB$ 時， $0.1 \leq \frac{\Delta f}{r} \leq 0.6$ 我們可以進一步計算得到 $0.098 \leq \beta \leq 1.1978$ 之間才可使用此公式。

4.4 當 $m(t)$ 為高斯調變時

$\Delta frms$: 頻率偏移的均方根值

$|\overline{\delta f}|$: 高斯調變平均頻率偏移

$$|\overline{\delta f}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta frms \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\Delta f}{r} = \frac{|\overline{\delta f}|}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\Delta f_{rms})}{\frac{2(1+\beta)f_M}{2\sqrt{3}}} = \frac{0.3478(1+\beta)f_M}{\frac{(1+\beta)f_M}{\sqrt{3}}} = 0.6024 \approx 0.6 \dots\dots\dots (28)$$

$$P(T=0) = 0.76$$

$$C_T = 197.786$$

$$A_{SI} = 14.696$$

$$C_{AI} = 0.002725$$

$$A_{SII} = 1.6778$$

$$C_{AII} = 0.14158$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\Delta f_{rms}) * \exp\left(\left(-\frac{f_M}{B}\right) * CNR\right) = 0.3478(1+\beta)f_M * \exp\left(\left(-\frac{f_M}{B}\right) * CNR\right) \dots\dots (29)$$

$\frac{\Delta f}{r} = 0.6$ ，符合在[4]計算機模擬使用範圍內 $0.1 \leq \frac{\Delta f}{r} \leq 0.6$ 。

釘波雜訊的功率譜密度

$$S_{\theta'}(\omega) = V \int_{A_{SII}}^{\infty} \int_{A_{SI}}^{\infty} \int_0^{\infty} P(A_{II})P(A_I)P(T) \left| F \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 dT dA_I dA_{II} \dots\dots\dots (30)$$

$S_{\theta'}(\omega), S_{\theta''}(\omega)$ ：釘波雜訊的功率譜密度

$$S_{\theta'}(\omega) = V \left\{ \int_{A_{SI}}^{\infty} \frac{\pi^2 P(A_I)}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_I}\right)^2\right]^2} dA_I + \int_{A_{SII}}^{\infty} \frac{\pi^2 P(A_{II})}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_{II}}\right)^2\right]^2} dA_{II} \right\} + V * 2\pi^2 * [P(T=0) + (1-P(T=0))(1-4\omega^2/C_T)] \exp(-2\omega^2/C_T) * \left\{ \left(\int_{A_{SI}}^{\infty} \frac{P(A_I)dA_I}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_I}\right)^2\right]^2} \right) * \left(\int_{A_{SII}}^{\infty} \frac{P(A_{II})dA_{II}}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_{II}}\right)^2\right]^2} \right) \right\} \dots\dots\dots (31)$$

(19)式中

$$F \left[\frac{d\theta}{dt} \right]_{\omega=0} = 2\pi \dots\dots\dots (32)$$

(20)式中

$$\left| F \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \right|_{\omega=0}^2 = 4\pi^2 \dots\dots\dots (33)$$

此種模型附合，釘波雜訊的面積為 2π 的基本定義原型，則此模型可以成立。
 (13)式主要依照圖-2 計算機模擬所得的波形加以設計而成，但是仍有缺憾，所推得的釘波雜訊功率頻譜密度 $S_{\theta}(\omega)$ 必定小於真正的釘波雜訊的功率頻譜密度，是故我們必須用(34),(35)式來表示較為貼切，模型是一回事，真實的計算又必須要有所修正，才能附合所需：

$$S_{\theta}(\omega) = V \int_{A_{SI}}^{\infty} \int_{A_{SII}}^{\infty} \int_0^{\infty} P(A_{II}) P(A_I) * \left| F \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \right|^2 dA_I dA_{II} \dots\dots\dots (34)$$

$$S_{\theta}(\omega) = V * \left\{ \int_{A_{SI}}^{\infty} \frac{\pi^2 P(A_I)}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_I} \right)^2 \right]^2} dA_I + \int_{A_{SII}}^{\infty} \frac{\pi^2 P(A_{II})}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_{II}} \right)^2 \right]^2} dA_{II} \right\} + V * \left(\int_{A_{SI}}^{\infty} \frac{2\pi^2 P(A_{II}) dA_I}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_{II}} \right)^2 \right]^2} \right) * \left(\int_{A_{SII}}^{\infty} \frac{P(A_{II}) dA_{II}}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega}{2A_{II}} \right)^2 \right]^2} \right) \dots\dots\dots (35)$$

結論

本文主要在訂正和修改[4]中的文獻，釘波雜訊的模型為(13)式，附合釘波雜訊面積為 2π 基本原則， $m(t)=0$ 時，出現釘波雜訊的個數修改為(3)式， $m(t)$ 為弦式調變時，出現的釘波雜訊個數為(26)式， $m(t)$ 為高斯調變時，出現釘波雜訊的個數為(29)式，且各指出其使用之範圍，其中條件為 $f_M = 4.5MHz$ ，使對於衛星系統中傳輸調頻信號中的釘波雜訊功率計算能有較為準確計算，進對於臨界點的闡述有較為有力的估計，而且 $m(t)$ 為弦式調變或高斯調變，皆在其計算模擬的範圍內[4]，通常視頻信號被視為高斯調變， $m(t)$ 為高斯調變之 SNR 值較合乎一般使用。

參考文獻

- [1] S.O. Rice, "Noise in FM Recivers". Time Series Analysis, M. Resenbiatt (EG), wiley, 1963, PP 395-422.
- [2] N.H. Stochel, D.L. Schilling, "Gaussian and Click Noise in an FM/FM Multiplex Receiver". IEEE Trans. On Communication Technology, Vol. COM-20, PP 1-40, August 1975.
- [3] H. Mahr, "Ueber den Schwelieneffect bei Frequency-modulation", Der Fernmelde- Ingenieur, PP 1-40, August 1975.
- [4] A.P. Gallois, A.M. Böck, "Simulation and Modelling of FM-Clicks", IEEE Trans Broadcasting. Vol. BC-33, No. 1, PP 8-13, March 1987.
- [5] Taub. H., and D.L. Schilling., Principles of Communication System, Mc Graw-Hill. New York, 1986, ch. 4, 10.