積分法於慣性矩值求解之研究

藍天雄[1]、王明庸[2]

[1] 德霖技術學院機械工程學系副教授
[2]大同大學機械工程學系副教授

摘　要

慣性矩對工程力學實屬重要，教學或學習時常因欠缺連貫性的概念，導致對慣性矩值的求解不甚瞭解，實有需要針對慣性矩之性質與應用深入探討。本文針對慣性矩之定義作統整之介紹，並說明各種慣性矩求解方法及其步驟；進而針對積分法求解慣性矩提出實例探討，比較極座標求解法與直角座標求解法之差異，同時探討直接積分法與微慣性矩積分法在慣性矩值求解上之適用性。藉由本文所提之慣性矩值求解步驟與應用分析方法，對應用積分法求解慣性矩值必當有所助益。

關鍵詞：慣性矩、積分法、座標轉換

A Study on the Resolution of Moment of Inertia with Integration

T. S. Lan*and M. Y. Wang[+]

***** Associate Professor, Department of Mechanical Engineering
De Lin Institute of Technology
[+] Associate Professor, Department of Mechanical Engineering
Tatung University

Abstract

Moment of inertia is imperative to Engineering Mechanics. Lacking of connected conception during instruction or education, the accepting of moment of inertia is often disordered. As a result, it is essential to examine the properties and applications on moment of inertia. This paper not only introduces the definition, but also describes the declaration steps for different methods on moment of inertia. Additionally, the case study on the resolution of moment of inertia via integration technique is constructed. Moreover, the comparisons of different coordinates as well as various integration techniques on the applicability are well developed. Through our proposed resolution steps and analytic technique on the adaptability of moment of inertia, the utilization of integration technique in resulting moment of inertia can then be furthermore enhanced.

Keywords：*moment of inertia, integration, coordinate transformation*

T. S. Lan*and M. Y. Wang+ 1

壹、前言

慣性矩為工程力學重要物理量之一，在靜力學 [1, 2, 3, 4, 5, 6] 提到慣性矩值的求解與面積慣性矩之應用；而質量慣性矩則為動力學 [7, 8, 9, 10] 重要性質；材料力學樑分析問題時，需用到組合體面積慣性矩。在長期的教學經驗中，學習者通常欠缺連貫性的概念，對於慣性矩值的求解亦不甚瞭解，也常在座標轉換時出錯。因此，實有需要針對慣性矩之性質與應用深入探討。

民國 85 年，王明庸、鄭永長[11]『慣性矩之電腦輔助教學研究』，曾作架構性的研討，並用於教學工作。王明庸、陳東慶[12]加以統整思考方式作全盤性的研討。本文將進一步針對如何使用積分法求解慣性矩，依據教學教材之研究，期能提供一套慣性矩求解之教學與研究分析方法，進而對相關的工程力學應用有所助益。

貳、相關理論

一、慣性矩定義

(一)慣性矩(*Area moment of inertia*)

又稱二次矩、面積二次矩，僅為數學意義之公式，無任何物理意義。於材料力學樑分析問題用到。公式如下：

$$I_x = \int y^2 dA \text{ ，} \quad I_y = \int x^2 dA \text{ ，} \quad I_{xy} = \int xy dA \qquad (1)$$

單位：mm^4

(二)質量慣性矩(*Mass moment of inertia*)

為物體抗旋轉的物理量。其值越大，越不易使其旋轉。公式如下：

$$I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \text{ ，} I_{yy} = \int \left(z^2 + x^2\right) dm \text{ ，} I_{zz} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$I_{xy} = \int xydm \text{ ，} I_{yz} = \int yzdm \text{ ，} I_{zx} = \int zxdm \qquad (2)$$

式中 I_{ij} 表示在法線向量為 i-軸的切截面上，指向 j 方向的慣性矩值。　　單位：$Kg \cdot m^2$

(三)慣性矩狀態

圖 1 中 I_{ij} 為慣性矩之表示法，當 $i = j$ 時，稱為慣性矩；當 $i \neq j$ 時，稱為慣性積。

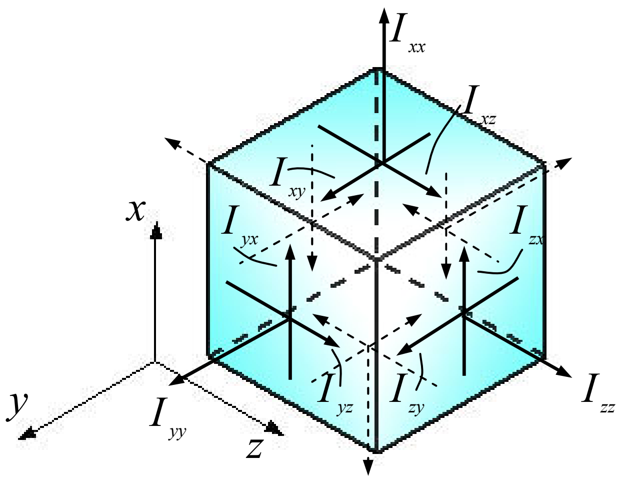


圖 1、慣性矩之表示

(四)慣性矩張量

依慣性矩狀態圖的慣性矩值如下形式表示即爲慣性矩張量。

$$[I_o]=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{3}$$

二、慣性矩求解

(一)定義法

若迴轉半徑(Radius of Gyration) K_G 已知，代入公式 $I_G = AK_G{}^2$ 或 $I_G = MK_G{}^2$ 分別可得面積慣性矩及質量慣性矩。

(二)查表法

面積慣性矩與質量慣性矩之基本形狀的慣性矩值於一般力學的教科書[1, 2, 3, 4]中皆有列表可查；但表列之慣性矩值皆由積分法求得。

(三)積分法

積分法分爲直接積分法與微慣性矩積分法，敘述如下：

1 直接積分法

取欲求形狀中任意一微小元素(體積或面積)，依慣性矩之基本定義積分而求得慣

性矩值之方法；面積慣性矩在直角座標之 $dA_i = dxdy$ 與極座標之 $dA_i = rdrd\theta$ ，以及質量慣性矩在直角座標之 $dm_i = \rho dxdydz$ 與圓柱座標之 $dm_i = \rho(rdrd\theta)dx$ 。

直接積分法依垂直思考法得解題步驟如下：

(1)取點元素

(2)多重積分

(3)元素形心

(4)定義積分

2 微慣性矩積分法

選取適合之標準元素（如水平條狀元素、直立條狀元素、薄板元素、薄圓盤元素、薄殼元素、薄橢圓盤元素及圓殼元素等），經過座標轉換後所積分而得的慣性矩值。

微慣性矩積分法依垂直思考法得解題步驟如下：

(1)標準元素

(2)單重積分

(3)座標轉換

(4)積分得值

(四)實驗法

對於複雜形狀或不適於用積分法求解時，則採用實驗法求解。由實驗求得自然頻率 ω_n 值，由查表得材料彈簧常數*K*值，代入公式 $J_o = \frac{K_t}{\omega_n^2}$ 可得極慣性矩值。

參、實例探討

一、例題一

已知：四分之一圓半徑 R，如圖 2 所示。

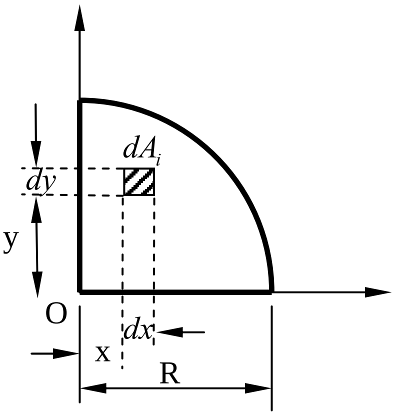


圖 2、四分之一圓

求證：(1)面積為 $A=\dfrac{\pi R^2}{4}$ 。

(2)座標原點狀態：$I_x=\dfrac{\pi R^4}{16}$ ，$I_y=\dfrac{\pi R^4}{16}$ ，$I_{xy}=\dfrac{R^4}{8}$ 。

(3)形心點狀態：$I_{\bar{x}}=\dfrac{(9\pi^2-64)R^4}{144}$ ，$I_{\bar{y}}=\dfrac{(9\pi^2-64)R^4}{144}$ ，$I_{\overline{xy}}=0$ 。

【解法一】以直角座標法求解

a. 面積元素： $dA_i = dxdy$

b. 求取面積： $A=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2\ \ x^2}} y^2dy\,dx = h\int_0^R\left[\sqrt{R^2\ \ x^2}\right]dx=\dfrac{\pi R^2}{4}$ (詳見附錄 A)

c. 元素形心： (x, y)

d. 定義積分： $I_x=\int {y_i}^2 dA_i = \int y^2 dA = \int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy\right]dx=\int_0^R\left[\dfrac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\dfrac{\pi R^4}{16}$

(詳見附錄 B)

$$I_y=\int {x_i}^2 dA_i=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dyx^2dx=\int_0^R\left[x^2\sqrt{R^2-x^2}\right]dx=\frac{\pi R^4}{16}$$

(詳見附錄 C)

$$I_{xy}=\int x_iy_idA_i=\int xydA=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy\right]xdx=\int_0^R\left[\frac{R^2-x^2}{2}\right]xdx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{R^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^R=\frac{1}{2}(\frac{R^4}{4})=\frac{R^4}{8}$$

e. 形心位置：

$$\bar{x}=\frac{\int x_i dA_i}{A}\quad 分子=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\right]xdx=\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{R^3}{3}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}}=\frac{4R}{3\pi}$$

同理

$$\bar{y}=\frac{\int y_i dA_i}{A}\quad 分子=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy\right]dx=\int_0^R\frac{1}{2}(R^2-x^2)dx=\frac{R^3}{3}$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}}=\frac{4R}{3\pi}$$　　故形心位置 $C(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi})$

f. 形心點面積慣性矩：

由平行軸定理　$I_x=I_{\bar{x}}+Ady^2$

$$\frac{\pi R^4}{16}=I_{\bar{x}}+(\frac{\pi R^2}{4})\,(\frac{4R}{3\pi}-0)^2$$　故 $I_{\bar{x}}=\frac{(9\pi-64)R^4}{144\pi}$

同理　$I_y=I_{\bar{y}}+Adx^2$

$$\frac{\pi R^4}{16}=I_{\bar{y}}+(\frac{\pi R^2}{4})\,(\frac{4R}{3\pi}-0)^2$$　故 $I_{\bar{y}}=\frac{(9\pi-64)R^4}{144\pi}$

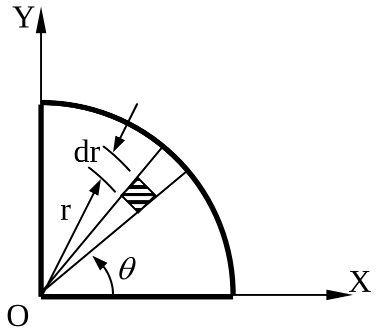
同理　$I_{xy}=I_{\overline{xy}}+Adxdy$

$$\frac{R^4}{8}=I_{\overline{xy}}+(\frac{\pi R^2}{4})\,(\frac{4R}{3\pi}-0)\,(\frac{4R}{3\pi}-0)$$　故 $I_{\overline{xy}}=\frac{(9\pi-32)}{72}R^4$

g. 座標原點狀態：$I_o=\begin{bmatrix}\frac{\pi R^4}{16} & -\frac{R^4}{8}\\ -\frac{R^2}{8} & \frac{\pi R^4}{16}\end{bmatrix}$

h. 形心點狀態： $I_C = \begin{bmatrix} \dfrac{(9\pi-64)R^4}{144} & -\dfrac{(9\pi-32)}{72}R^4 \\ -\dfrac{(9\pi-32)R^4}{72} & \dfrac{(9\pi-64)R^4}{144} \end{bmatrix}$

【解法二】以極座標法求解



a. 面積元素： $dA_i = rdrd\theta$

b. 求取面積： $A = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right] rdr = \int_0^R (\frac{\pi}{2}) rdr = \frac{\pi R^4}{4}$

c. 元素形心：$(r\cos\theta, r\sin\theta)$

d. 定義積分：

$$I_x = \int {y_i}^2 dA_i = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)^2 d\theta\right] rdr = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 (\frac{1-\cos 2\theta}{2}) d\theta\right] rdr$$

$$= \int_0^R r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} rdr = \int_0^R r^2 (\frac{\pi}{4}) rdr = \frac{\pi}{4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_y = \int {x_i}^2 dA_i = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)^2 d\theta\right] rdr = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 (\frac{1+\cos 2\theta}{2}) d\theta\right] rdr$$

$$= \int_0^R r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} rdr = \frac{\pi}{4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xy} = \int x_i y_i dA_i = \int_0^R \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)(r\cos\theta) d\theta\right] rdr = \int_0^R \left[r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta\right] rdr$$

$$= \int_0^R r^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} rdr = \frac{1}{2}\int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{8}$$

由例題一可知，以極座標求解較優於直角座標求解。一般用直接積分法作標準元件求解，此法可計算上較為繁雜，但可訓練微積分技巧，並可作標準元素慣性矩值求解之用 。

二、例題二

一圓錐體如圖 3 所示，以直接積分法求其質量慣性矩I_{xx}、I_{yy}與I_{zz}。

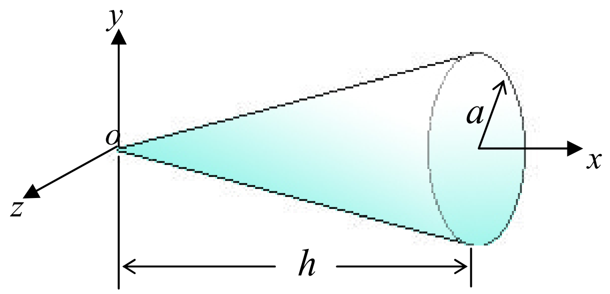
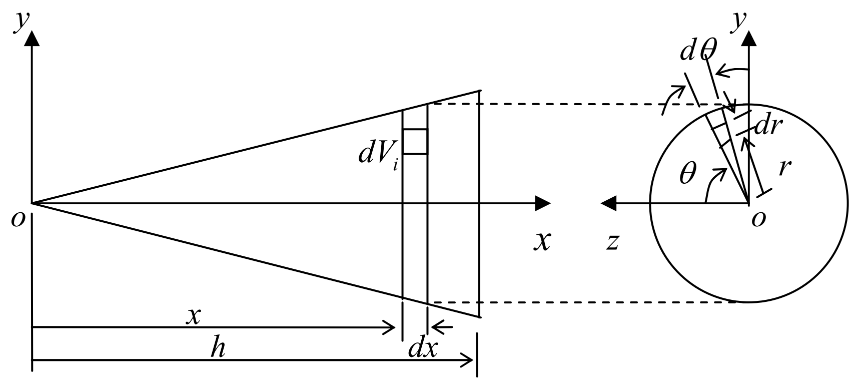


圖 3、圓錐體 A

【解法】



a. **取點元素**

$$dm_i = \rho dV_i = \rho dx(dA) = \rho dx(rdrd\theta)$$

b. **多重積分**

$$m=\rho\int dV_i=\rho\int_0^h\left[\int_0^{a\frac{x}{h}}\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]rdr\right]dx=2\pi\rho\int_0^h\left[\int_0^{a\frac{x}{h}}rdr\right]dx$$

$$=2\pi\rho\int_0^h\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\frac{x}{h}}dx=\rho\pi\int_0^h a^2(\frac{x}{h})^2dx=\frac{\rho\pi a^2}{h^2}(\frac{h^3}{3})=\frac{\rho\pi a^2 h}{3}$$

c. 元素形心

$$(x,r\sin\theta,r\cos\theta)$$

d. 定義積分

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)dm=\int r^2dm=\rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{ax}{h}}\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]r^3dr\right]dx$$

$$=2\pi\rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{ax}{h}}r^3dr\right]dx=2\pi\rho\int_0^h\frac{1}{4}(\frac{ax}{h})^4dx=2\pi\rho(\frac{1}{4})(\frac{ax}{h})^4(\frac{h^5}{5})$$

$$=\frac{\pi\rho a^4h}{10}=\frac{\rho\pi a^2h}{3}(\frac{3a^2}{10})=\frac{3ma^2}{10}$$

$$I_{yy}=\int(x^2+z^2)dm=\int(x^2+r^2\cos^2\theta)dm$$

$$=\rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{ax}{h}}\left[\int_0^{2\pi}(x^2+r^2\cos^2\theta)d\theta\right]rdr\right]dx$$

$$=\rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{ax}{h}}\left[\int_0^{2\pi}(x^2+\frac{1+\cos2\theta}{2}r^2)d\theta\right]rdr\right]dx$$

$$=\rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{ax}{h}}2\pi(x^2+\frac{r^2}{2})rdr\right]dx$$

$$=2\pi\rho\int_0^h\left[\frac{x^2r^2}{2}+\frac{r^4}{8}\right]_0^{\frac{ax}{h}}dx=2\pi\rho\int_0^h\left[\frac{x^2(a^2x^2)}{2h^2}+\frac{a^4x^4}{8h^4}\right]dx$$

$$=2\pi\rho\left[\frac{a^2x^5}{10h^2}+\frac{a^4x^5}{40h^4}\right]_0^h=2\pi\rho(\frac{a^2h^3}{10}+\frac{a^4h}{40})$$

$$=\frac{\rho\pi a^2h}{3}(\frac{3h^2}{5}+\frac{3a^2}{20})=\frac{3m}{5}(\frac{a^2}{4}+h^2)$$

$$I_{zz}=I_{yy}=\frac{3m}{5}(\frac{a^2}{4}+h^2)$$

三、例題三

一圓錐體如圖 4 所示，試以微慣性矩積分法求解I_{xx}，I_{yy}，I_{zz}。

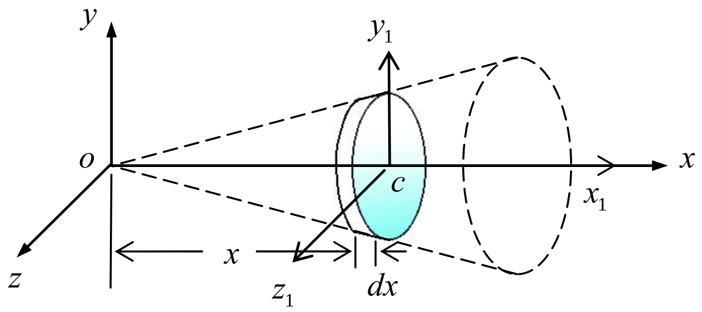


圖 4、圓錐體 B

【解法】

(1)標準元素

$$dI_{x_1x_1} = \frac{dm}{2} y^2$$

$$dI_{y_1y_1} = \frac{dm}{4} y^2$$

$$dI_{z_1z_1} = \frac{dm}{4} y^2$$

(2)單重積分

$$m = \int dm = \rho \int (\pi y^2) dx = \rho\pi \int_0^h (\frac{a}{h} x)^2 dx = \rho\pi (\frac{a}{h})^2 \left[\frac{h^3}{3}\right]_0^h = \frac{\rho\pi a^2 h}{3}$$

(3)座標轉換

元素形心 $c(x,0,0)$ ；座標原點 $o(0,0,0)$

$$dI_{xx} = dI_{x_1x_1} + (dy^2 + dz^2)dm = dI_{x_1x_1} + \left[(0-0)^2 + (0-0)^2\right]dm = dI_{x_1x_1}$$

(4)積分得值

$$I_{xx} = \int dI_{x_1x_1} + 0 = \int \frac{y^2}{2} dm = \frac{\rho\pi}{2} \int_0^h (\frac{a}{h} x)^4 dx = \frac{\rho\pi a^4 h^5}{10 h^4} = \frac{\rho\pi a^4 h}{10} = \frac{m a^2}{10}$$

同理

$$I_{yy} = \int dI_{y_1y_1} + \int x^2 dm$$

前項

$$= \int dI_{y_1y_1} = \int \frac{y^2}{4} dm = \frac{\rho\pi}{4} \int_0^h y^4 dx = \frac{\rho\pi}{4} \int_0^h (\frac{ax}{h})^4 dx = \frac{\rho\pi}{4} (\frac{a}{h})^4 (\frac{h^5}{5})$$

$$= \frac{\rho\pi a^4 h}{20} = \frac{\rho\pi a^2 h}{3} (\frac{3a^2}{20}) = \frac{3 m a^2}{20}$$

$$後項=\int x^2dm=\rho\int_0^h x^2\pi(\frac{a}{h})^2x^2dx=\frac{\rho\pi a^2}{h^2}(\frac{h^5}{5})=\frac{\rho\pi a^2h^3}{5}=\frac{\rho\pi a^2h}{3}(\frac{3h^2}{5})=\frac{3mh^2}{5}$$

故 $I_{yy}=\frac{3ma^2}{20}+\frac{3mh^2}{5}=\frac{3m}{5}(\frac{a^2}{4}+h^2)$

同理

$$I_{zz}=\int dI_{z_1z_1}+\int x^2dm=\frac{3m}{5}(\frac{a^2}{4}+h^2)$$

四、例題四

長方柱 A 如右圖 5 所示，試以直接積分法求其 I_{ZZ} 。

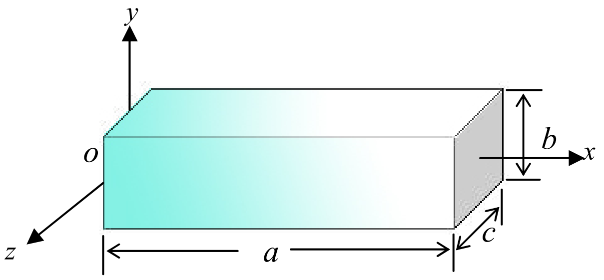
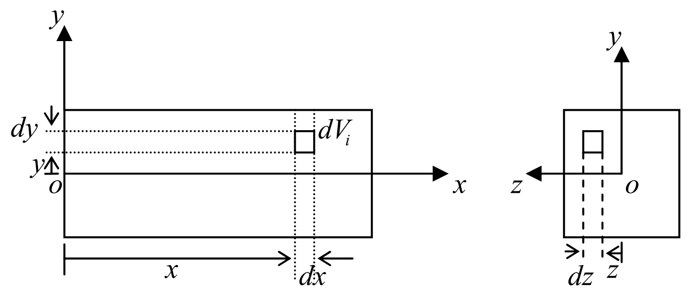


圖 5、長方柱 A

【解法】



a. 取點元素

$dm_i=\rho dxdydz$

b. 多重積分

$$m=\rho\int dV=\rho\int_0^a\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}dz\right]dy\right]dx$$

$$=\rho[x]_0^a[y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}[z]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}=\rho abc$$

c. 元素形心

(x, y, z)

d. 定義積分

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm = \rho \int_0^a \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2 + y^2)\,dz \right] dy \right] dx$$

$$= \rho \int_0^a \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2)[z]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\, dy \right] dx$$

$$= \rho c \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \rho c \int_0^a (x^2 b + \frac{b^3}{12})\,dx$$

$$= \rho c \left[\frac{x^3 b}{3} + \frac{b^3 x}{12} \right]_0^a = \rho c \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^3}{12} \right)$$

$$= \frac{\rho abc}{12}(4a^2 + b^2) = \frac{m(4a^2 + b^2)}{12}$$

五、$\boxed{\text{例題五}}$

長方柱B如圖 6 所示，試以微慣性矩積分法求解I_{xx}、I_{yy}、I_{zz}的值。

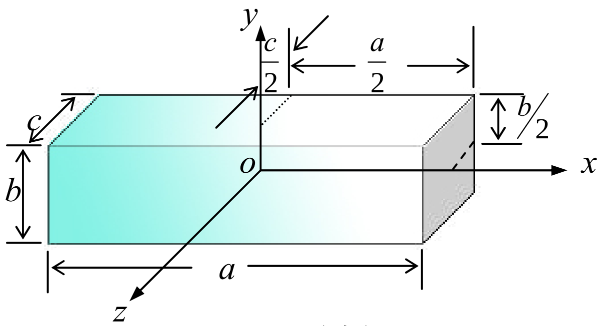


圖 6、長方柱 B

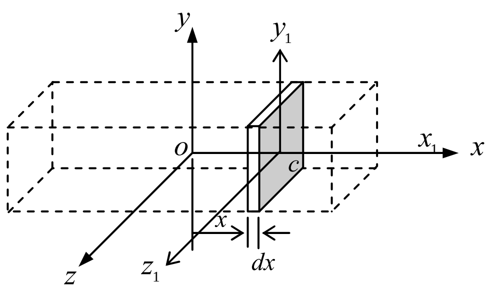
【解法】

a. 標準元素

$$dI_{x_1x_1} = \frac{dm}{12}(b^2 + c^2)$$

$$dI_{y_1y_1} = \frac{dm}{12}c^2$$

$$dI_{z_1z_1} = \frac{dm}{12}b^2$$



b. 單重積分

$$m=\rho\int dV=\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(bc)dx=\rho abc$$

c. 座標轉換

元素形心 $c(x,0,0)$ ； 座標原點 $o(0,0,0,)$

$$dI_{xx}=dI_{x_1x_1}+dm(dy^2+dz^2)$$

d. 積分得值

$$I_{xx}=\int dI_{xx}=\int dI_{x_1x_1}+\int[(0-0)+(0-0)]^2dm=\int dI_{x_1x_1}$$
$$=\frac{\rho}{12}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(b^2+c^2)bcdx=\frac{\rho abc(b^2+c^2)}{12}=\frac{m(b^2+c^2)}{12}$$

同理 $I_{yy}=\int dI_{y_1y_1}+\int[(\mathrm{x}-0)+(0-0)]^2dm=\int dI_{y_1y_1}+\int \mathrm{x}^2dm$

前項 $=\dfrac{\rho}{12}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(c^2)bcdx=\dfrac{\rho abc^3}{12}=\dfrac{mc^2}{12}$

後項 $=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}bcx^2dx=\dfrac{bc}{3}\left[a^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}=\dfrac{a^3bc}{12}=\dfrac{ma^2}{12}$

故 $I_{yy}=\dfrac{mc^2}{12}+\dfrac{ma^2}{12}=\dfrac{m(c^2+a^2)}{12}$

同理 $I_{zz}=\int dI_{z_1z_1}+\int \mathrm{x}^2dm=\dfrac{\rho}{12}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(b^2)bcdx+\dfrac{ma^2}{12}=\dfrac{\rho ab^3c}{12}+\dfrac{ma^2}{12}=\dfrac{m(a^2+b^2)}{12}$

比較例題二、三及例題四、五可知，微慣性矩積分法僅需座標轉換及單重積分，較具實用性，但需記憶標準元素名稱、標準元素微面積、微質量式為慣性矩公式、標準元素形心及座標轉換。

肆、結果與討論

應用直接積分法求解慣性矩時，以極座標求解較優於直角座標求解，同時無須牢記標準元素之慣性矩值及相關幾何關係，亦不必處理座標轉換的問題；但缺點為可能出現複雜的積分式，且須注意多重積分(雙重或三重)的邊界關係。應用微慣性積分法求解慣性矩時，只需處理單重積分；但缺點為需記憶標準元素與座標轉換公式，同時並需找出相關之幾何關係（如元素名稱、微慣性矩值、微面積值、微質量值、形心位置等）。

用直接積分法作標準元件之慣性矩求解時計算較為繁雜，雖然微慣性矩積分法僅需座標轉換及單重積分，較具實用性，但因需記憶標準元素名稱、標準元素微面積、微質量式為慣性矩公式、標準元素形心及座標轉換法則，較不適用於試題之求解。

伍、結論

慣性矩對工程力學實屬重要，本文針對慣性矩之定義作統整之介紹，並說明各種慣性矩求解方法及其步驟；進而針對積分法求解慣性矩提出實例探討，先求得面積慣性矩，再推廣爲薄元素質量慣性矩，最後再以此求得體積元素質量慣性矩先以此求得微慣性矩積分法所需的微元素。同時比較極座標求解法與直角座標求解法之差異，並探討直接積分法與微慣性矩積分法在慣性矩值求解上之適用性；使熟悉以積分法求解元件之慣性矩值，並瞭解兩種積分法的差異性與其關連性。

結果顯示，以極座標求解較優於直角座標求解，以直接積分法作標準元件求解較爲單純，但計算繁雜；以微慣性矩積分法則較爲實用，但不適於試題之求解。藉由本文所提之慣性矩值求解步驟與應用分析方法，對應用積分法求解慣性矩值必當有所助益。

參考文獻

[1] I. H. Shames, *Engineering Mechanics Statics* ,3rd edition, Prentice-Hall, Inc., 1980.

[2] J. L. Meriam and L. G. Kraige, *Engineering Mechanics Statics*, 5th edition (SI version), John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[3] R. C. Hibbeler and S.C. Fan, *Engineering Mechanics Statics*, 3rd edition (SI version), Prentice Hall, Inc., 2004.

[4] W. F. Riley and L. D. Sturges, *Engineering Mechanics Statics*, John Wiley & Sons, Inc.,1993.

[5] F. P. Beer, E. R. Johnston and W. E. Clawsen, *Vector Mechanics for Engineers*, *Statics*, 7th edition (SI version), Mc Graw-Hill, 2004.

[6]孟繼洛，應用力學—靜力學，高立圖書有限公司，台灣台北，1987。

[7] J. L. Meriam and L. G. Kraige, *Engineering Mechanics Statics*, 4th edition,John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[8] I. H. Shames, *Engineering Mechanics Dynamics*, 3rd edition, Prentice-Hall, Inc., 1980.

[9] R. C. Hibbeler and S.C. Fan, *Engineering Mechanics Dynamics*, 3rd edition (SI Version), Prentice Hall, Inc., 2004.

[10] F. P. Beer, E. R. Johnston and W. E. Clawsen, *Vector Mechanics for Engineers*, *Dynamics*, 7th edition (SI version), Mc Graw-Hill, 2004.

[11]王明庸、鄭永長，“慣性矩之電腦輔助教學研究”，大同學報，第 26 期，pp.237~247，民國 85 年 11 月。

[12]王明庸、陳東慶，“梁剪力與彎矩之電腦輔助教學研究”，大同學報，第 27 期，pp.221-230，民國 86 年 11 月。

附錄 A:三角代換法

設 $x = R\sin\theta \quad x = 0 \quad \theta = 0°$

則 $dx = R\cos\theta d\theta \quad x = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos\theta)(R\cos\theta d\theta) = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}$$

附錄 B

設 $x = R\sin\theta \quad x = 0 \quad \theta = 0°$

則 $dx = R\cos\theta d\theta \quad x = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^R \frac{1}{3}(R^2 \quad x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(R\cos\theta)^3 (R\cos\theta) d\theta = \frac{R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= \frac{R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{R^4}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}) d\theta = \frac{R^4}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}) d\theta$$

$$= \frac{R^4}{12}\left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{12}\left[\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2}) + 0 + 0\right] = \frac{\pi R^4}{16}$$

即 $\int_0^R \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi R^4}{16}$

附錄 C

設 $x = R\sin\theta \quad x = 0 \quad \theta = 0°$

則 $dx = R\cos\theta d\theta \quad x = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^R \left[x^2\sqrt{R^2 - x^2}\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[R^2\sin^2\theta\right]\left[R\cos\theta\right]\left[R\sin\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 (\sin^2\theta)(\cos^2\theta) d\theta = R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1-\cos 2\theta}{2})(\frac{1+\cos 2\theta}{2}) d\theta$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 2\theta) d\theta = \frac{R^4}{4} \int_0^{R} (1-\frac{1+\cos 4\theta}{2}) d\theta$$

$$= \frac{R^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta) d\theta = \frac{R^4}{8} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi R^4}{16}$$

即 $I_y = \int_0^R \left[x^2\sqrt{R^2 - x^2}\right] dx = \dfrac{\pi R^4}{16}$