

板之有限元素振動分析法

(Finite-Element Vibration Analysis of Plates)

段國雄

摘 要

板承受動態外力發生振動需要解決之諸問題，須先求得板之自由振動頻率和振態，然後始可進一步分析研究，處理板振動之方法一般可分為古典解決微分方程式法，能分析法包括 Rayleigh 法、Ritz 法，Galerkin-Vlasov 法，差分法以及有限元素法等；有限元素法在分析板之振動問題方面佔着一個很重要的角色，因為它可克服一般分析法所難以處理之荷重，幾何形狀以及邊界條件不規則之問題，一般以有限元素法分析板之振動問題皆不考慮橫貫剪力 (Transverse shear) 之影響，本文之旨趣在探討當板厚度逐漸增加時，橫貫剪力對自由振動頻率和振態之影響情形，提出一種適合於分析厚板之有限元素振動分析法。

一、緒 言

從工程應用之觀點來看，有關板之自由振動是一個重要的，同時也是一個很有趣之題目。板承受動態外力發生振動需要解決之諸問題，須先求得板之自由振動頻率和振態，然後始可進一步分析研究。處理板振動之有關文獻中，大體上可分兩種；一種為應用連體力學之理論分析法，另一種為利用數值分析法，應用古典之連體力學理論在板之形狀規則，邊界條件簡單時，尚不難處理，如遇板之形狀不規則或邊界條件複雜時，則不易處理，遇到此種情況，一般皆用數值分析法，此種方法又略可分為解決微分方程式法（包括差分法與數值積分法）及矩陣有限元素分析法。利用矩陣有限元素分析板之振動問題，通常採用勁度法，此法首先將板分割成若干之有限元素如三角形、矩形或長帶形等，並假設一板元素變形曲面之變位函數，再據以求得板元素之勁度矩陣及等質質量矩陣，然後將各板元素之勁度矩陣及等質質量矩陣組成一全板之合成勁度矩陣及合成等質質量矩陣，最後由運動方程式求得答案，惟一般利用此種方法處理板之問題，皆視為薄板僅考慮彎曲之影響，不考慮橫貫剪力 (Transverse shear) 之影響，本文提供一種適合於分析厚板之有限元素振動分析法，除考慮彎曲

2.

之影響外，並考慮橫貫剪力之影響，利用矩形元素以勁度法分析之，文後附上利用電子計算機解題之程序計劃以供參考。

二、厚板之彈性力學理論

1. 假設：(1)板中立面之變位與板厚相比很小。

(2)板於承受垂向力之後，一面伸長，其另一面縮短，在厚板中央處之中立面雖有彎曲，但假設其無伸縮。

(3)與板中立面平行之平面不計其垂面應力，且假定板厚並無變化。

(4)板彎曲後原垂直中立面之截面雖仍為一平面，但由於橫貫剪力之影響，並不再垂直於中立面。

2. 應變 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 與變位 w_z 及 $\bar{\gamma}_x, \bar{\gamma}_y$ 之關係

設 u_x, v_y, w_z 分別為板上任一點之 x, y, z 三方向之變位，則由圖 1 可知在 x 等於一定處，板截面之平均轉角 ϕ_x ，為由板彎曲後原垂直於中立面之截面仍垂直於中立面之轉角 $\frac{\partial w_z}{\partial x}$ 及由於橫貫剪力使截面所產生之轉角 $\bar{\gamma}_x$ 相疊加而成；同樣在 y 等於一定處，其各個轉角分別為 $\phi_y, \frac{\partial w_z}{\partial y}$ 及 $\bar{\gamma}_y$ 。

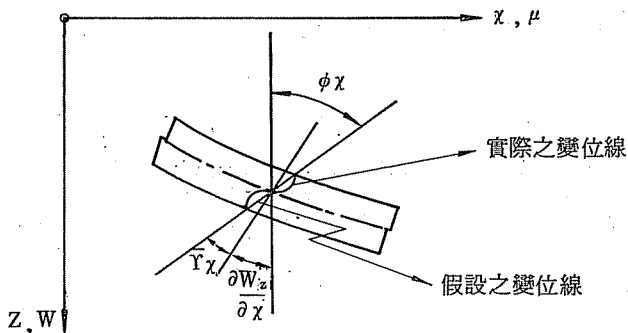


圖 1 在 x 在一定處其截面之變位情形

因此可得

$$w_z(x, y, z) = w_z(x, y, 0) = w_z(x, y) \quad \dots\dots\dots (1a)$$

$$u_x(x, y, z) = -z\phi_x(x, y) = -z \left[\frac{\partial w_z}{\partial x} + \bar{\gamma}_x(x, y) \right] \quad \dots\dots\dots (1b)$$

$$v_y(x, y, z) = -z\phi_y(x, y) = -z \left[\frac{\partial w_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_y(x, y) \right] \quad \dots\dots\dots (1c)$$

由應變之定義，利用 (1a), (1b) 及 (1c) 三式之關係，可得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\bar{\gamma}_x}{x} \right) = z X_x \quad \dots\dots\dots (2a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial y} \right) = z X_y \quad \dots\dots\dots (2b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (2c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = -z \left(2 \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial x} \right) = z X_{xy} \quad \dots\dots\dots (2d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} = -\bar{\gamma}_x \quad \dots\dots\dots (2e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} = -\bar{\gamma}_y \quad \dots\dots\dots (2f)$$

式中 $X_x = - \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial 2\bar{\gamma}_x}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2g)$

$$X_y = - \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2h)$$

$$X_{xy} = - \left(2 \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2i)$$

3. 垂面應力 σ_x , σ_y 及剪應力 τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} 與 w_z 及 $\bar{\gamma}_x$, $\bar{\gamma}_y$ 之關係

根據應力與應變之關係，就等方性 (Isotropic) 材料而言，可得

$$\sigma_x = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_x + u\epsilon_y) = \frac{Ez}{1-u^2} (X_x + uX_y) \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_y + u\epsilon_x) = \frac{Ez}{1-u^2} (X_y + uX_x) \quad \dots\dots\dots (3b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{EZ}{2(1+u)} X_{xy} \quad \dots\dots\dots (3c)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G(-\bar{\gamma}_y) \quad \dots\dots\dots (3d)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G(-\bar{\gamma}_x) \quad \dots\dots\dots (3e)$$

式中 $G = \frac{E}{2(1+u)}$ 為剪力彈性係數。

u 為波桑比 (Poisson's Ratio)

4. x , y 方向之彎矩 M_x , M_y 及扭矩 M_{xy} 以及剪力 Q_x , Q_y 與 w_z 及 $\bar{\gamma}_x$, $\bar{\gamma}_y$ 之關係。

截取出板之單位面積，其自由體如圖二。

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D (X_x + uX_y) \quad \dots\dots\dots (4a)$$

4.

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = D (X_y + u X_x) \dots\dots\dots (4b)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = \frac{D(1-u)}{2} X_{xy} \dots\dots\dots (4c)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz = Gh (-\bar{\gamma}_x) \dots\dots\dots (4d)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz = Gh (-\bar{\gamma}_y) \dots\dots\dots (4e)$$

式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-u^2)}$ 為板之撓曲剛度

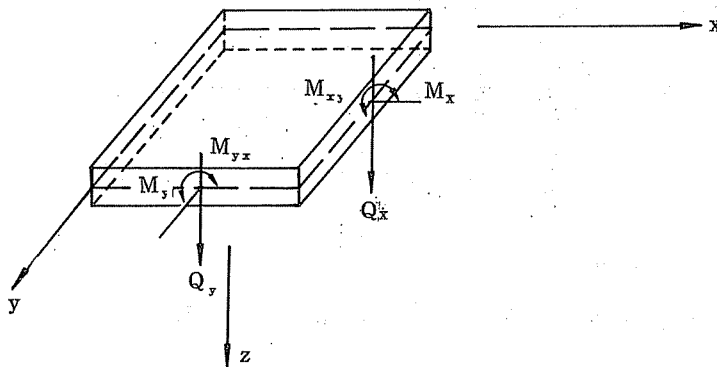


圖2 微小平板元素之合成應力 (Stress Resultants)

三、厚板之有限元素振動分析法

1. 有限元素之振動分析理論

由虛功原理知：

$$\delta U_1 = \delta W_o - \int_v \{\delta u\}^T \rho \{\ddot{u}\} \, dv \dots\dots\dots (5)$$

式中： $\delta U_1 = \int_v \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} \, dv$ 為虛應變能

$\delta W_o = \int_s \{\delta u\}^T \phi \, ds + \int_v \{\delta u\}^T X \, dv + \{\delta U\}^T \{P\}$ 為外力所作用之虛功。其中 $\{u\}$ 為一元素內任一點之變位素， ϕ 為表面力係單位面積之作用力 (Surface Force)， X 為物體力係單位體積之作用力 (Body Force)， $\{P\}$ 為作用於元素節點上之力素， $\{U\}$ 為節點之變位素 $\{\epsilon\}$ 為廣義應變 (Generalized Strain)， $\{\sigma\}$ 為廣義應力 (Generalized Stress)， ρ 為質量密度 (Mass Density)。

由 $\{u\} = \langle a \rangle \{U\}$ 式中 $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \end{Bmatrix}$ ， $\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$ 為節點之變位素

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \langle b \rangle \{U\} \text{ 式中 } \langle b \rangle = \langle b(x, y, z) \rangle \text{ 爲形狀函數 (Shape Function) } \\ \{\delta u\} &= \langle a \rangle \{\delta U\} \\ \{\delta \epsilon\} &= \langle b \rangle \{\delta U\} \\ \{\ddot{u}\} &= \langle a \rangle \{\ddot{U}\} \end{aligned}$$

再由虎克定律

$$\{a\} = [d] \{\epsilon\} \text{ 式中 } [d] \text{ 爲彈性矩陣 (Elasticity Matrix),}$$

將上述之各關係式代入(5)式, 可得

$$\int_v \{\delta U\}^T \langle b \rangle^T [d] \langle b \rangle \{U\} dv = \int_s \{\delta U\}^T \langle a \rangle^T \phi ds + \int_v \{\delta U\}^T \langle a \rangle^T X dv + \int_v \{\delta U\}^T [P] - \int_v \rho \{\delta U\}^T \langle a \rangle^T \langle a \rangle \{\ddot{U}\} dv$$

$$\therefore [M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = P + \int_s \langle a \rangle^T \phi ds + \int_v \langle a \rangle^T X dv \dots\dots\dots (6a)$$

$$\text{式中 } [M] = \int_v \rho \langle a \rangle^T \langle a \rangle dv \dots\dots\dots (6b)$$

$$[K] = \int_v \langle b \rangle^T [d] \langle b \rangle dv \dots\dots\dots (6c)$$

[M] 爲等質質量矩陣

[K] 爲勁度矩陣

2. 矩形板元素之勁度矩陣

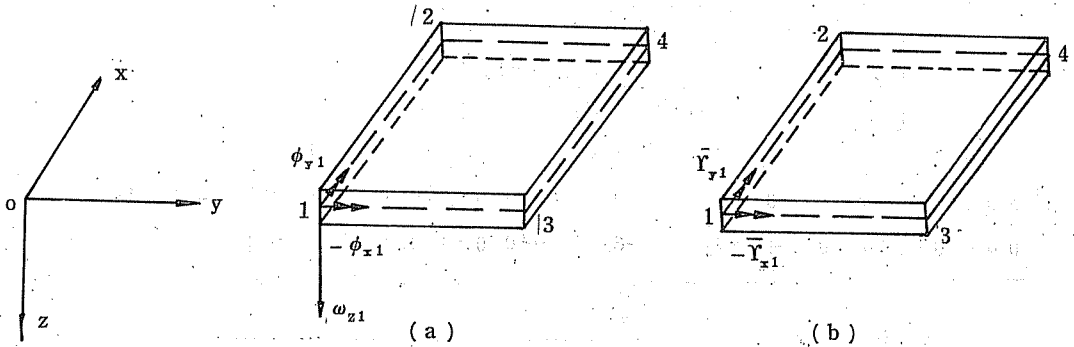


圖3 (a) 彎曲—剪力之交互作用 (12 D. O. F.)

(b) 橫貫剪力之作用 (8 D. O. F.)

$$\begin{cases} \phi_x = \frac{\partial w_z}{\partial x} + \bar{\gamma}_x, \phi_y = \frac{\partial w_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_y \\ w_z = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ y^3 \ x^3y \ xy^3 \rangle \{\alpha_i\} \quad (i = 1 \sim 12) \\ \bar{\gamma}_x = \langle 1 \ x \ y \ xy \rangle \{\alpha_j\} \quad (j = 13 \sim 16) \\ \bar{\gamma}_y = \langle 1 \ x \ y \ xy \rangle \{\alpha_k\} \quad (k = 17 \sim 20) \end{cases}$$

如圖3所示一矩形板元素E, 其節點之編號爲1, 2, 3, 4每一節點有五個自由度 (Degree of Freedom), 四個節點共有二十個自由度, 板元素中任一點之變位與所假設之變位函數之關係如下:

6.

$$\begin{Bmatrix} w_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{16} \\ \alpha_{17} \\ \alpha_{20} \end{Bmatrix} \dots\dots(7)$$

(7)式可簡書為 $\{u\} = [P] \{\alpha\}$ (8)

如以節點 1 為原點，將各節點之座標值代入，則可得

$$\begin{aligned} \{U\} &= [C] \{\alpha\} \\ \{\alpha\} &= [C]^{-1} \{U\} \\ \therefore \{u\} &= [P] [C]^{-1} \{U\} \end{aligned}$$

式中之 $[C]$ 為一 20×20 階之常數矩陣。

由 (2g), (2h), (2i) 及 (10) 式，可得曲率 (Curvatures) 與節點變位素之關係式如下：

$$\begin{aligned} \{X\} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{\gamma}_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial y} \\ -2 \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \bar{\gamma}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 & 0 & -1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 & 0 & 0 & -1 & -x & 0 & -1 & 0 & -y \end{bmatrix}}_{[C]} [C]^{-1} \{U\} \\ &= [B_B] \{U\} \dots\dots(11) \end{aligned}$$

式中 $[B_B] = [C] [C]^{-1}$ (12)

同理，由 (2e), (2f) 及 (10) 式，可得剪應變 (Shear Strain) 與節點變位之關係式如下：

$$\begin{aligned} \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\bar{\gamma}_x \\ -\bar{\gamma}_y \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x & -y & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x & -y & -xy \end{bmatrix}}_{[\eta]} [C]^{-1} \{U\} \\ &= [B_s] \{U\} \dots\dots(13) \end{aligned}$$

式中 $[B_s] = [\eta] [\eta]^{-1}$ (14)

其次由彎矩與曲率之關係，以及由剪力與剪應變之關係可得下列諸式：

$$\begin{aligned}
 \{M\} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & uD & 0 \\ uD & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-u)D}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_{xy} \end{Bmatrix} \\
 &= [D_B] \{X\} \\
 &= [D_B] [B_B] \{U\} \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{Q\} &= \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \\
 &= [D_s] \{\gamma\} \\
 &= [D_s] [B_s] \{U\} \dots\dots\dots (16)
 \end{aligned}$$

最後由 (11), (13) 及 (15) 諸式, 應用 (6c) 式, 可求得矩形板元素之勁度矩陣如下:

$$[k] = \int_A [B_B]^T [D_B] [B_B] dA + \int_A [B_s]^T [D_s] [B_s] dA \dots\dots\dots (17)$$

3. 矩形板元素之等質質量矩陣

由 (1a)(1b)(1c) 三式, 應用 (10) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 w_z(x, y, z) &= w_z(x, y) \\
 &= \underbrace{\langle 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle}_{\langle a_z \rangle} [C]^{-1} \{U\} \\
 &= \langle a_z \rangle \{U\} \dots\dots\dots (18a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= -z \left[\frac{\partial w_z}{\partial x} + \bar{\gamma}_x(x, y) \right] \\
 &= \underbrace{-z \langle 0 \ 1 \ 0 \ 2x \ y \ 0 \ 3x^2 \ 2xy \ y^2 \ 0 \ 3x^2y \ 1 \ x \ y \ xy \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle}_{\langle a_x \rangle} [C]^{-1} \{U\} \\
 &= \langle a_x \rangle \{U\} \dots\dots\dots (18b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_y(x, y, z) &= -z \left[\frac{\partial w_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_y(x, y) \right] \\
 &= \underbrace{-z \langle 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ x \ 2y \ 0 \ x^2 \ 2xy \ 3y^2 \ x^3 \ 3xy^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ x \ y \ xy \rangle}_{\langle a_y \rangle} [C]^{-1} \{U\} \\
 &= \langle a_y \rangle \{U\} \dots\dots\dots (18c)
 \end{aligned}$$

根據 (6b) 式, 可求得矩形板元素之等質質量矩陣如下:

$$[m] = \int_v \rho \langle a_x \rangle^T \langle a_x \rangle dv + \int_v \rho \langle a_y \rangle^T \langle a_y \rangle dv + \int_v \rho \langle a_z \rangle^T \langle a_z \rangle dv \dots\dots\dots (19)$$

(19) 式中, 右邊第一項及第二項為板之轉動慣性 (Rotary Inertia) 第三項為板之位
移慣性 (Tranlational Inertia), 實用上轉動慣性之影響可以忽略。

4. 合成勁度矩陣與合成等質質量矩陣

將各個板元素之勁度矩陣合成為整個板之勁度矩陣即為合成勁度矩陣 (Assemblage of Stiffness Matrices), 此處合成之方法採用直接勁度法 (Disect Stiffness Method)

8.

，說明如下：

如圖四(a)，設一板元素E之節點a, b, c, d分別符合於整個板如圖四(b)之k, k+1, L, L+1節點，則板元素E之勁度矩陣。

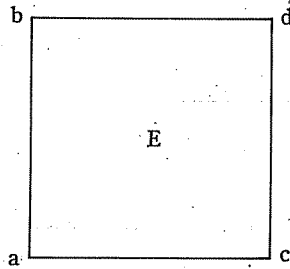


圖 4 (a) 矩形板元素E

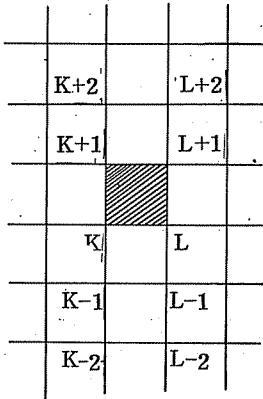


圖 4 (b)

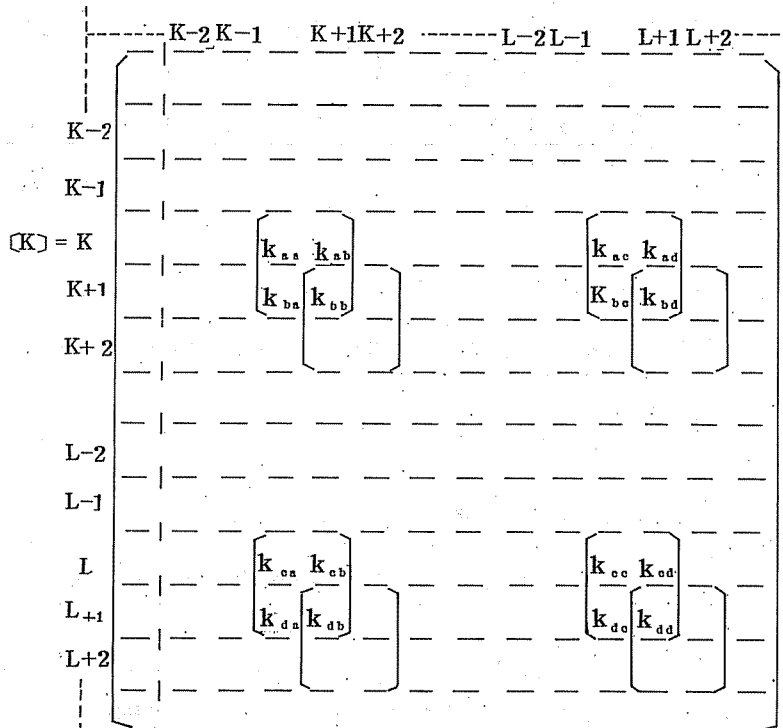


圖 4 (c)

$$[k]_E = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ac} & k_{ad} \\ k_{ba} & k_{bb} & k_{bc} & k_{bd} \\ k_{ca} & k_{cb} & k_{cc} & k_{cd} \\ k_{da} & k_{db} & k_{dc} & k_{dd} \end{bmatrix} 20 \times 20$$

內之十六個副矩陣，可直接加入整個板之合成勁度矩陣內，如圖四(c)所示，同樣方法可將其他板元素之勁度矩陣皆加入，以構成整個板之勁度矩陣，但此矩陣為一無支承之板之情況，為一奇異矩陣 (Singular Matrix)，不能求其逆矩陣，必須把邊界條件之變位素之有關行及列去掉，剩下之矩陣即為所需之對應於自由度之合成勁度矩陣。

至於合成等質量矩陣之建立方法與合成勁度矩陣之建立方法完全一樣。此兩合成矩陣之電子計算機程序，請參考附錄(二)。

5. 板之自由振動 (Free Vibration)

由 (6a) 式中，令動態外力為零，則可得

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

此式為一典型之有限自由度之自由振動方程式，因在自由振動時為諧和的，故可令

$$\{U\} = \{q\} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (21)$$

式中： ω 為自由振動弧頻率

$\{q\}$ 為振態

t 為時間

$$i = \sqrt{-1}$$

將 (21) 式代入 (20) 式中，可得

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{q\} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

(22) 式為一特徵值問題 (Eigenvalue Problem)，其自由振動弧頻率 ω 及振態 $\{q\}$ 之求解請參考附錄(二)之電子計算機程序。

四、例題

圖五示一四邊固定之方形板，其已知之數據為板長 $L = 4^m$ ，楊氏係數 $E = 2.0 \times 10^6$ ，波桑比 $\nu = 0.2$ ，質量密度 $\rho = 0.245$ ，板厚 $h = 0.1^m, 0.2^m, 0.4^m, 0.6^m, 0.8^m$

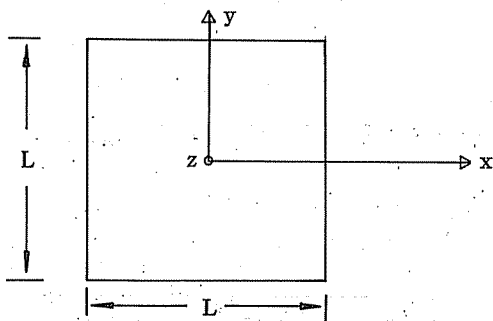
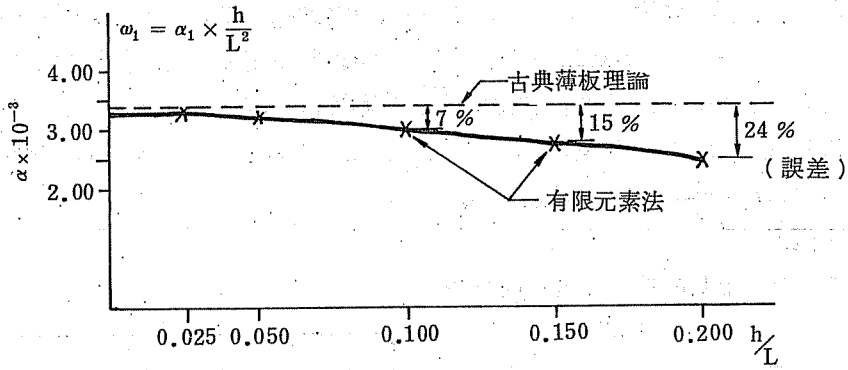


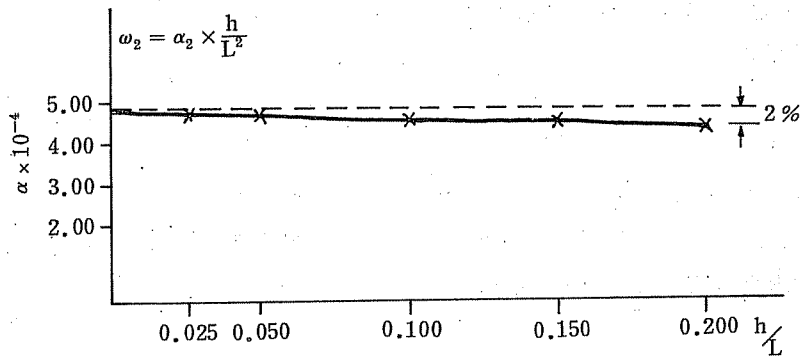
圖5 四邊固定之方形板

因板對稱於 x 及 y 軸，其自由振動之振態可分為：

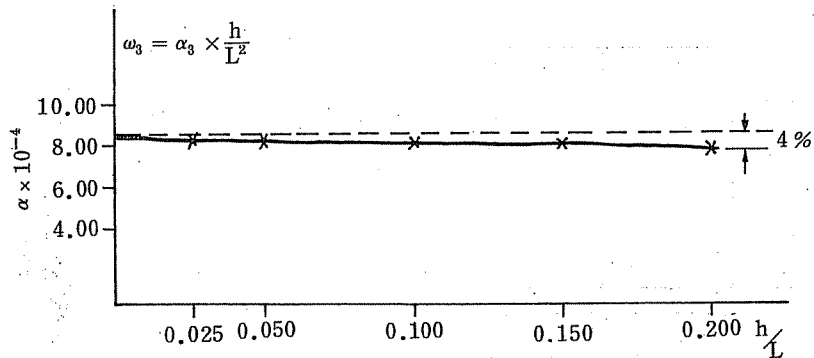
- (a) 對稱 x 軸及對稱 y 軸
- (b) 對稱 x 軸及反對稱 y 軸



(a) 第一個自由振動頻率 ω_1

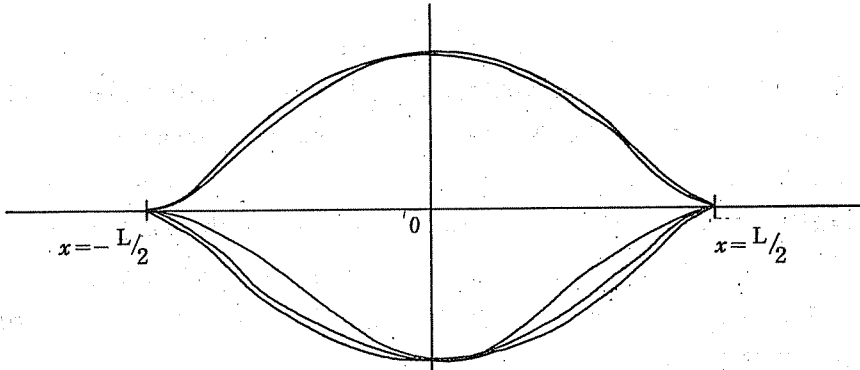


(b) 第二個自由振動頻率 ω_2

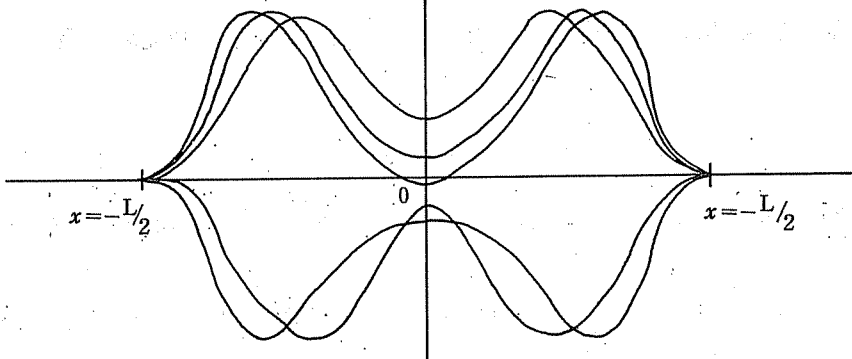


(c) 第三個自由振動頻率 ω_3

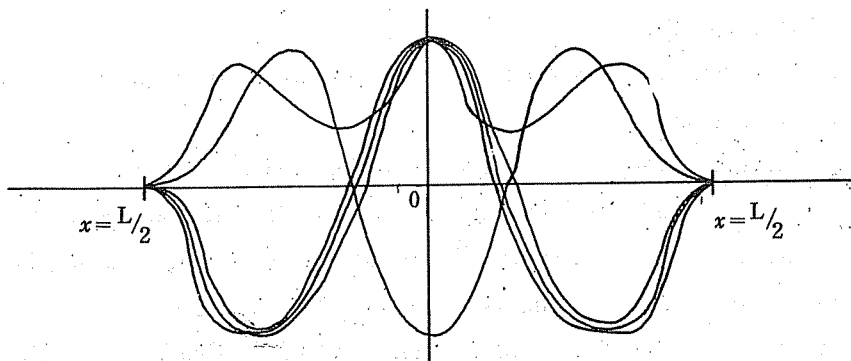
圖6 自由振動頻率



(a) 第一振態



(b) 第二振態



(c) 第三振態

圖 7 沿 $y = 0$ 斷面之振態

(c) 反對稱 x 軸及反對稱 y 軸

等三種情況，分析時只要取四分之一板面積即可，現以第一種情況為例，藉以觀察橫貫剪力對於不同板厚之自由振動之影響情況，圖六及圖七分爲其首三個自由振動弧頻率及振態。

五、結 論

板承受動態外力發生振動需要解決之諸問題，須先求得板之自由振動頻率及振態。本文提供一種適合於分析厚板之有限元素振動分析方法，以求板之自由振動弧頻率及振態，除考慮彎曲 (Bending) 之影響外，並加考慮橫貫剪力 (Transverse Shear) 之影響。所假設之變位函數 (Displacement Function) 符合有限元素法之收斂準則 (Convergence Criteria)，由本文推演之結果，可看出當板爲薄板時，橫貫剪力對板自由振動之影響並不明顯，因此只考慮彎曲之影響其結果尙屬正確，但當板厚愈增加時，橫貫剪力對板之自由振動之影響愈顯著，此時如不將橫貫剪力之影響考慮進去時，則其結果將不正確。文末附上利用電子計算機解答之程序計劃以供參考。

六、誌 謝

本文承蒙學長陳利明先生在電子計算機方面之幫忙，使本文得以完成，謹此敬致萬分之謝忱。

參考文獻

- (1) J. S. Prezemienicki : "Theory of Matrix Structural Analysis" Mc Graw-Hill, 1968.
- (2) O. C. Lienkiewicz and Y. K. Cheung : "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechenics" McGraw-Hill, 1967
- (3) 虞兆中 : "空間剛架之通解" 1966
- (4) 葉基棟 : "有限元素法筆記"
- (5) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger : "Theory of Plates and Shells" McGraw Hill, 1959
- (6) F. B. Hildebrand : "Methods of Applied Mathematics" 1965
- (7) Shen S. Kuo : "Numerical Methods and Computess" Addison-Wesley, 1965
- (8) Yau-Kai Cheung and M. S. Cheung : "Flexual Vibrations of Rectangular and Other Polygonal Plates" J. Eng Mech Div ASCE, Ap. 1971
- (9) Charles W. Pryor, Jy. Richard M. Barker and Daniel Frederick : "Finite Element Bending Analysis of Reissner Ptates" J. Eng. Mech. Div. ASCE Dec, 1970

- (10) Paul P. Lyun and Nahit Kumbasar : "Free Transverse Vibration of Flat Slabs"
" J. Eng. Mecl. Div ASCE Feb, 1969
- (11) William Y. J. Shieh, Seng-Lip Lee, and Richard A. Parmelee : "Analysis of
Plate Bending by Jriangular Elements " J. Eng Mech.Div ASCE , Oct, 1968

1964-1965

1966-1967

1968-1969

1970-1971

1972-1973

1974-1975

1976-1977

1978-1979

1980-1981

1982-1983

1984-1985

1986-1987

1988-1989

1990-1991

1992-1993

1994-1995

1996-1997

1998-1999

2000-2001

2002-2003

2004-2005

2006-2007

2008-2009

2010-2011

2012-2013

2014-2015

2016-2017

2018-2019

2020-2021

2022-2023

2024-2025

2026-2027

2028-2029

2030-2031

2032-2033

2034-2035

2036-2037

2038-2039

2040-2041

2042-2043

2044-2045

2046-2047

2048-2049

2050-2051

2052-2053

2054-2055