

非線性動力系統受參激與外力不同頻率激振的 混沌現象

簡守謙

德霖技術學院機械系

摘 要

本論文探討非線性系統受參激和外力多頻率激振之數值模擬，提出以 J 積分值為指標，用來建立 J 積分值的分歧圖及初始空間的吸引子盆地圖，解決系統解析法與數值模擬的困難性及複雜性。數值模擬受參激和外力多頻率激振非線性系統，包括週期性，頻率互鎖，混沌現象。利用 J 積分的分歧圖分辨頻率互鎖的週期響應、以及混沌運動，配合以 Poincaré 切面圖、相圖、頻譜圖和 Lyapunov 指數，詳細證明分歧現象，週期響應與混沌運動。

關鍵字：J 積分，分歧圖，頻率互鎖，混沌

Chaotic behaviors of the nonlinear dynamical system subjected to parametric and external multiharmonic excitations

Shoou-Chian Jen

Department of Mechanical Engineering, De Lin Institute of Technology

Abstract

In this paper, we study strongly nonlinear system subjected to parametric and external multiharmonic excitations with nonmultiple frequencies. We have provided an effective index J integral, which constructs the J bifurcation and basins of attraction to evaluate the influence of parameters and to observe the characteristics of these systems. Frequency-locking, motions, chaotic motion and basins of attraction are distinguished by J integral with assistance of Poninarcé section, phrase portraits, frequency spectrum, and Lyapunov exponent.

Keywords: J integral, bifurcation diagram, frequency-locking, chaos

壹、前言

當機構間出現間隙，可為分段線性的動力系統與多個非線性系統，而多個不同頻率激振的非線性系統，其發生原因可能是外部干擾激振、多個不同激振源或減／增速機構等。多個不同頻率情況下，頻率比值可能不是簡單的整數比，甚或是無理數。當比值為有理數時，則有頻率互鎖 (Mode-locked) 運動；如果為無理數時，則發生類週期 (Quasi-period) 運動。

Kang 等人[1-3]分析受多頻激振的分段線性系統，由積分值的分歧圖與 Poincarè 切面投影對應參數變化的分歧圖，辨別響應型式甚至混沌響應的響應型式。Oks 等人[4, 5]研究捲線機的抑制機構，建立三種分段線性系統來模擬分析此機構，採用數值模擬分析三種系統之共振與非共振區域，並且分析說明受一參激一外激分段線性系統接近捲線機的抑制機構；然而不同週期響應與混沌的發生沒有討論。在分析過程中，所獲得的參數之分歧值只探討到週期二。Padmanabhan 等人[6]探討受一簡諧外力激振的分段線性系統，利用連續參數變化技巧 (Parametric continuation scheme)，獲得矩陣方程式，藉由投射法 (Shooting method) 求取矩陣的特徵值，分析獲得週期倍增之分歧圖及發生混沌現象的邊界，但是此法在求解週期四以後就顯示其困難性。

Luo 等人[7, 8]研究膠著滑動 (stick-slip) 動力系統，輸送帶滑塊機構之單一外力激振，文中藉由映像結構以解析方法求取膠著狀況，此系統出現混沌之響應。Cheng 等人[9, 10]研究膠著滑動動力系統，輸送帶滑塊機構之雙頻率激振 (外激/參激)，分析二頻率激振時頻率比值為簡單分數，文中以解析方法求取膠著狀況，繪出分歧圖、Poincarè 切面圖和 Lyapunov 指數。膠著滑動動力系統在參數變化有豐富而複雜之頻率互鎖、類週期與混沌之響應。Czolczynski 等人[11, 12]對單／多自由度有兩邊阻擋或膠著滑動之碰撞衝擊動力系統，承受單一外力簡諧激振頻率時，穩態響應的理論解析與數值模擬之研究。

本研究針對非線性系統承受參激和外力多頻率激振不同的簡諧激振頻率，在數值模擬時提出以 J 積分值為指標，經由 J 積分值作為判別並分類響應型態，建立吸子盆地圖；進一步固定所有參數只改變其中一個參數與初始條件空間，繪出 J 積分之分歧圖，可完全清楚的表現系統之分歧現象，並分析混沌發展的路徑。分歧圖亦顯示多重響應的參數範圍。在多數研究學者探討此類多頻激振時，無法提供清楚有效的分歧圖，J 積分值及其分歧圖將有效的解決並分析此類複雜多變系統。

貳、研究方法

探討受多個不同頻率激振的強非線性系統，於數值模擬過程中歸納出，穩態解的起始值在初始條件改變情況下，只會以間隔基本週期的方式出現，利用 J 積分值其特性，當頻率互鎖(或類週期運動)的週期 n(Period-n)響應出現，此時頻率互鎖運動有下列關係:

$$x_i(t) = x_i(t + nT) \quad (1)$$

其中 x_i 是 d-維變數向量 X 的分量；n 是整數為週期-n(period-n)；T 是多個頻率互鎖的基本週期，即多個週期之最小公倍數。方程式(1)意義是頻率互鎖的週期 n 響應之週期為 nT 時間。

J 積分值，其定義如下，其中 T_x 暫態響應時間使 J 積分值為穩態值:

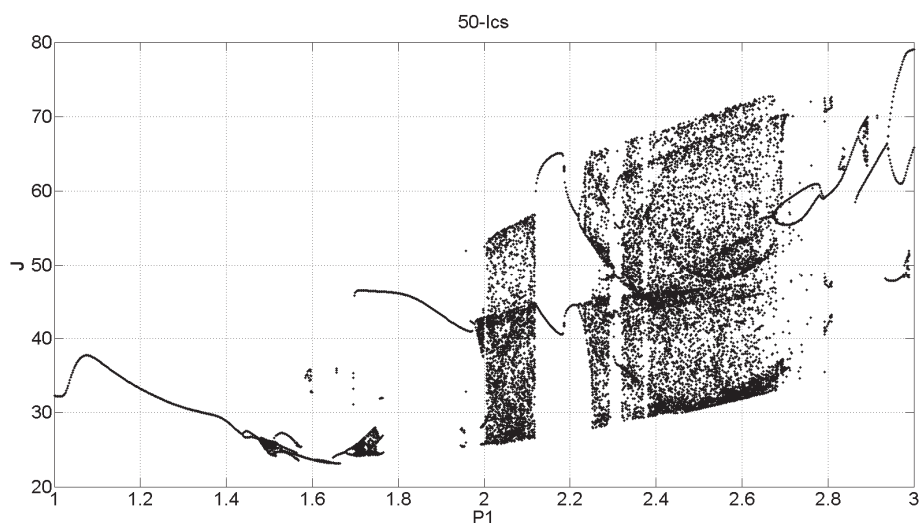
$$J = \int_{T_x}^{T_x+T} [x_i(t)]^2 dt \quad (2)$$

參、結果與討論

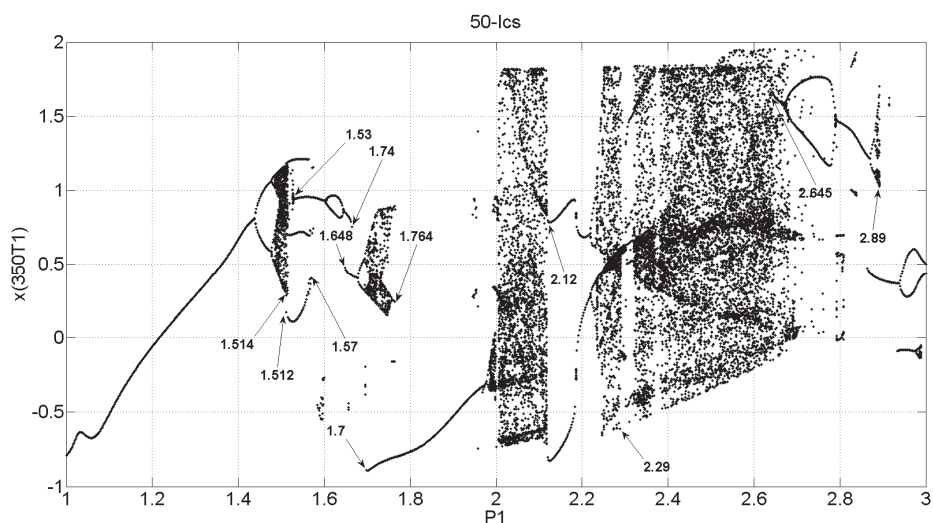
受參激與外力不同簡諧激振頻率的非線性方程式

$$x'' + \gamma x' + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x P_1 \cos(\omega_1 t) = P_2 \cos(\omega_2 t) + P_3 \cos(\omega_1 t) \quad (3)$$

其中： $x'' \equiv d^2x/dt^2$ ； $x' \equiv dx/dt$ ； γ 為線性阻尼係數； a_1 為線性勁度； a_2 和 a_3 為非線性勁度； ω_1 和 ω_2 分別是參激與外力激振的頻率； P_1 、 P_2 和 P_3 分別是參激與外力激振的振幅。

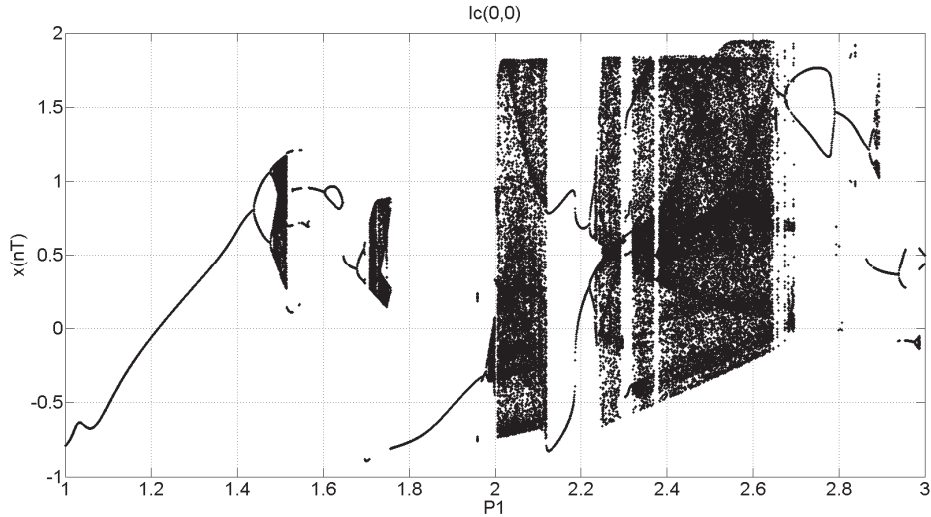


圖一 J 積分值對振幅 P_1 之分歧圖，50-Ics， $P_2=1$



圖二 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖，50-Ics

四階次 Runge-Kutta 數值積方法模擬方程式(3)，參數分別為 $\gamma=0.2$ 、 $a_1=1$ 、 $a_2=1.5$ 、 $a_3=1$ 、 $\omega_1=0.9$ 、 $\omega_2=1.5$ 、 $P_2=1$ 、 $P_3=2P_1$ ，頻率 ω_1 （週期為 T_1 ）和 ω_2 （週期為 T_2 ）之比值為 $3/5$ 。取 50 個初始條件，利用方程式(2)計算 J 積分值，圖一為 J 積分值對振幅 P_1 之分歧圖，呈現複雜而多族群之曲線為多重解之現象。圖二為 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖；圖二中，A 族在振幅 1~1.514 之間，是以週期一運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應；B 族在振幅 1.512~1.57 之間為不同之週期三運動 (P-3)；C 族在振幅 1.53~1.74 之間為週期一或週期二響應；D 族在振幅 1.648~1.764 之間，是以週期一運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應；E 族在振幅 1.7~2.12 之間，是以週期一運動隨振幅遞增而驟變為混沌響應；F 族在振幅 2.12~2.29 之間，是以週期二運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應；G 族在振幅 2.645~2.89 之間，是以週期一而週期二，再以週期一運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應；圖二有些族群沒有描述其響應。

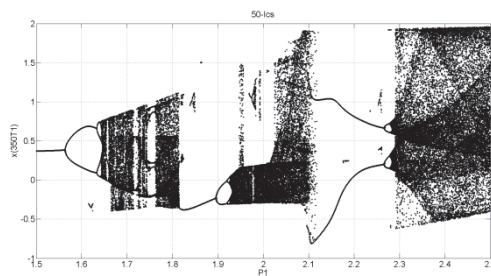


圖三 $x(nT)$ 對振幅 P_1 之分歧圖, $I_c(0,0)$

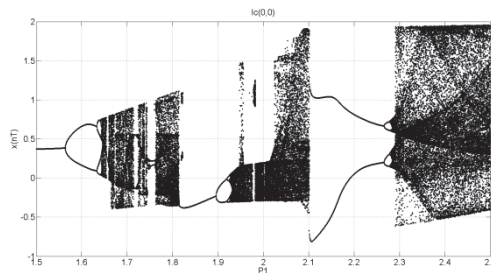
取單一初始條件為(0,0)，利用方程式(1)之特性，以基本週期($T=3T_1=5T_2$)切割，繪出圖三的分歧圖，分歧圖為 1 點、2 點、4 點、8 點、無限點等等，對應分別為週期一、週期二、週期四、週期八、混沌等等響應，分歧圖表示有多重解的現象，無法詳細顯示多重解的參數範圍。當二個頻率之比值為 3/5，假設 Poincarè 切面圖的時間為 $T_1(T_2)$ 時，分歧圖將出現 3(5)整倍數之族曲線分歧圖，無法清楚描述響應型態，但配合圖一可以分析多重解的參數範圍。

取 50 個初始條件，參數分別為 $P_2=0.5$ 、 $P_3=2P_1$ 時，圖四為 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖。圖中有以週期一運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應，或是以週期二運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應。取單一初始條件為(0,0)，繪出圖五的分歧圖，比較 50 個與單一初始條件之二圖幾乎重疊，說明多重解的範圍甚少。

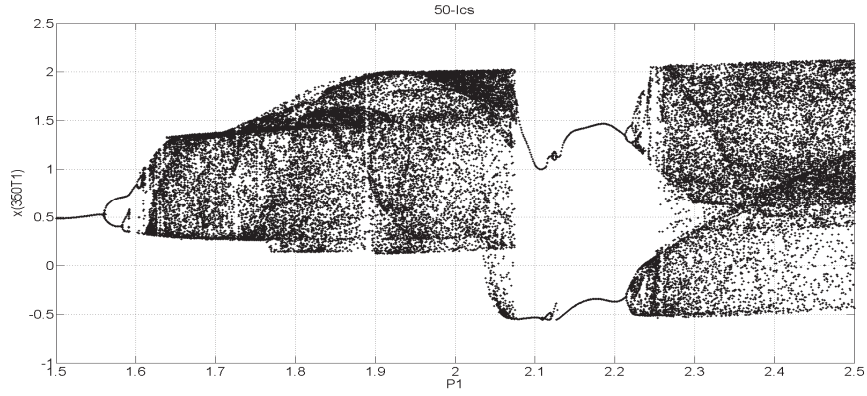
更改頻率，參數分別為 $\gamma=0.18$ 、 $\omega_1=0.9$ 、 $\omega_2=1.45$ 、 $P_2=0.6$ 、 $P_3=2P_1$ ，頻率之比值較為複雜為 18/29。取 50 個初始條件，圖六 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖，以週期一運動並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應範圍較少。取單一初始條件為(0,0)，繪出圖七的分歧圖，比較二圖，多重解在振幅 1.55~1.61 與 2.08~2.26 範圍其餘甚少。



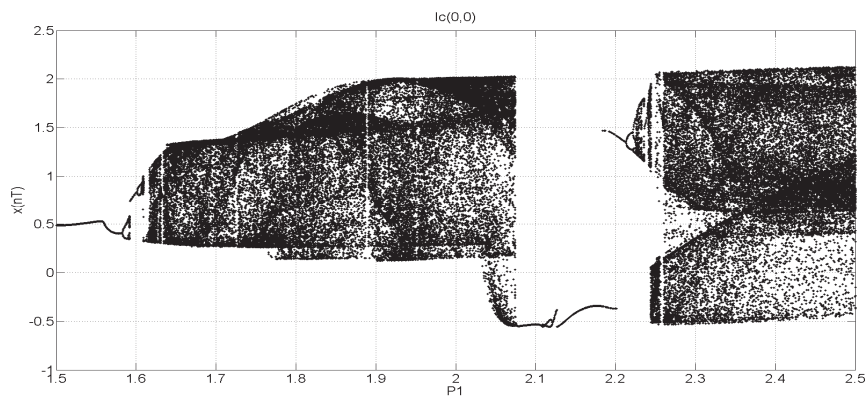
圖四 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖, 50-Ics, $P_2=0.5$



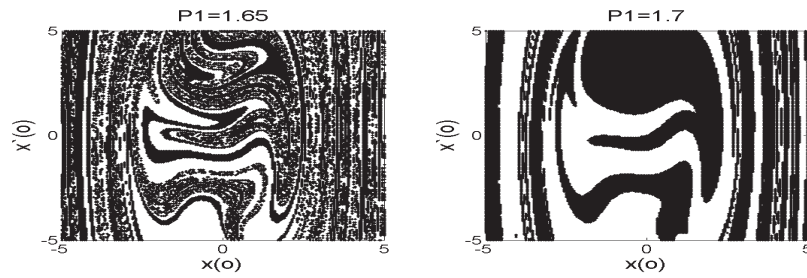
圖五 $x(nT)$ 對振幅 P_1 之分歧圖, $I_c(0,0)$



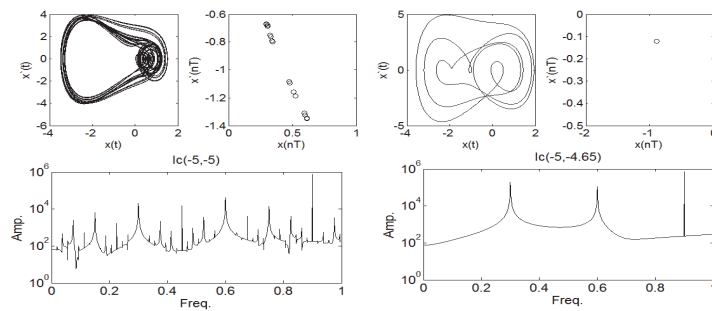
圖六 $x(350T_1)$ 對振幅 P_1 之分歧圖，50-Ics



圖七 $x(nT)$ 對振幅 P_1 之分歧圖，Ic(0,0)



圖八 吸子盆地圖。取圖二參數，左圖 $P_1 = 1.65$ ，右圖 $P_1 = 1.7$

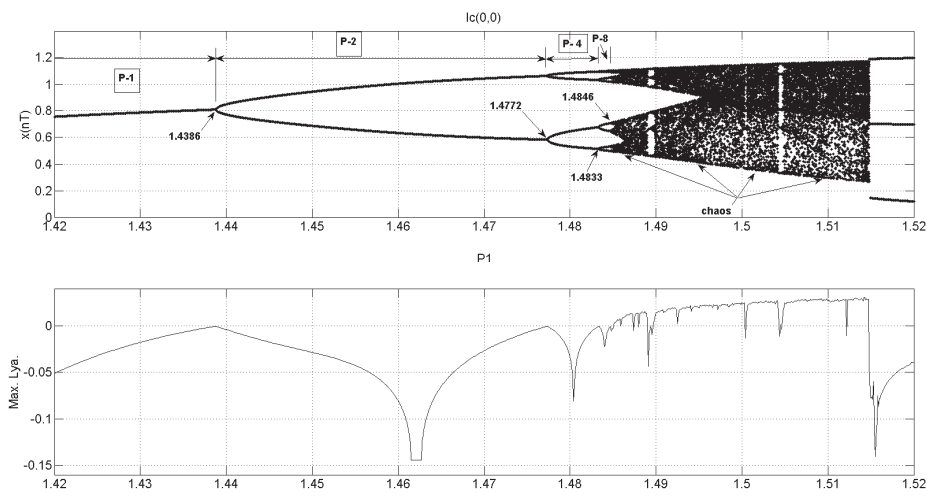


圖九 相圖、Poincaré 切面圖、頻譜圖； $P_1 = 1.7$ 。左圖(-5,-5) 週期十六，右圖(-5,-4.65) 週期一

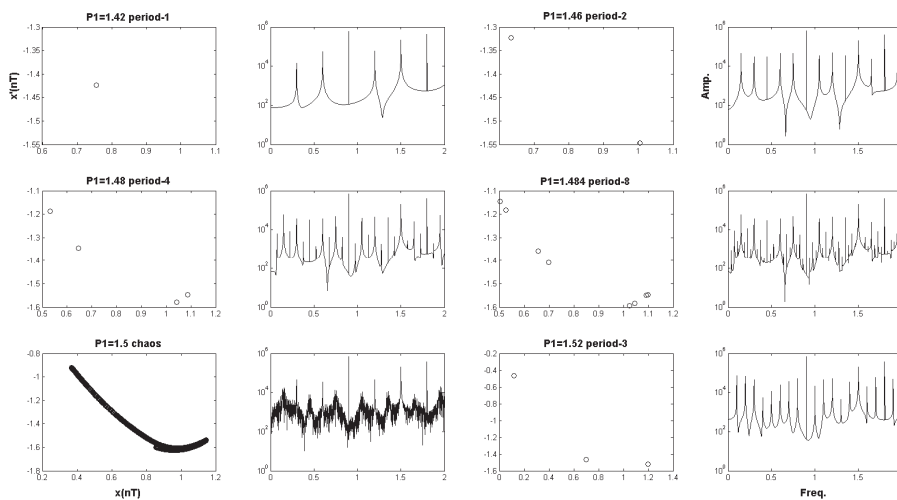
圖八為吸子盆地圖。左圖白色區域為圖二之C族群，週期一響應，左圖黑區域為圖二之D族群，週期一響應，有平滑邊界，但破碎邊界較多。右圖白色區域為圖二之D族群，週期十六響應，右圖黑區域為圖二之E族群，週期一響應，有平滑邊界較多，亦有破碎邊界。圖九 相圖、Poincaré 切面圖、頻譜圖， $P_1 = 1.7$ 。左圖為初始條件(-5,-5)，Poincaré切面圖16點，頻線增量是0.3/16，為週期十六運動；右圖為初始條件(-5,-4.65)，Poincaré切面圖1點，頻線增量是0.3/1，為週期一運動。

取圖三在振幅 1.42~1.52 放大並詳細分析其響應，繪出圖十 $x(nT)$ 與最大 Lyapunov 指數對振幅圖，振幅在 1.42~1.4386 為週期一響應，振幅在 1.4386~1.4772 為週期二響應，振幅在 1.4772~1.4833 為週期四響應，振幅在 1.4833~1.4846 為週期八響應，並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應。當 Lyapunov 指數是負為週期運動，Lyapunov 指數是正則為混沌響應[13]。

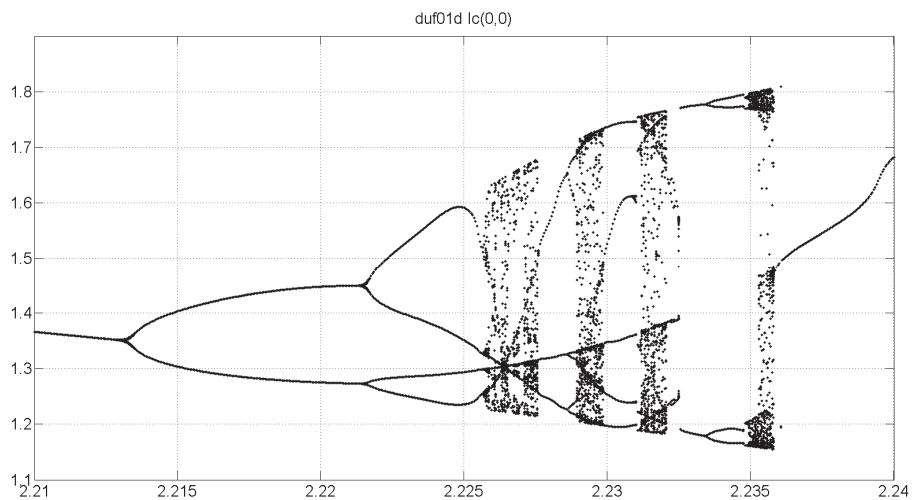
圖十一 Poincaré 切面圖、頻譜圖，分析圖十分歧圖之響應形態，振幅為 1.42、1.46、1.48、1.484、1.5、1.52 等等，Poincaré 切面圖分別為 1 點、2 點、4 點、8 點、無限點、3 點等等，頻線增量分別是 0.3/1、0.3/2、0.3/4、0.3/8、0.3/∞、0.3/3 等等，分析響應分別為週期一、週期二、週期四、週期八、混沌、週期三等等。



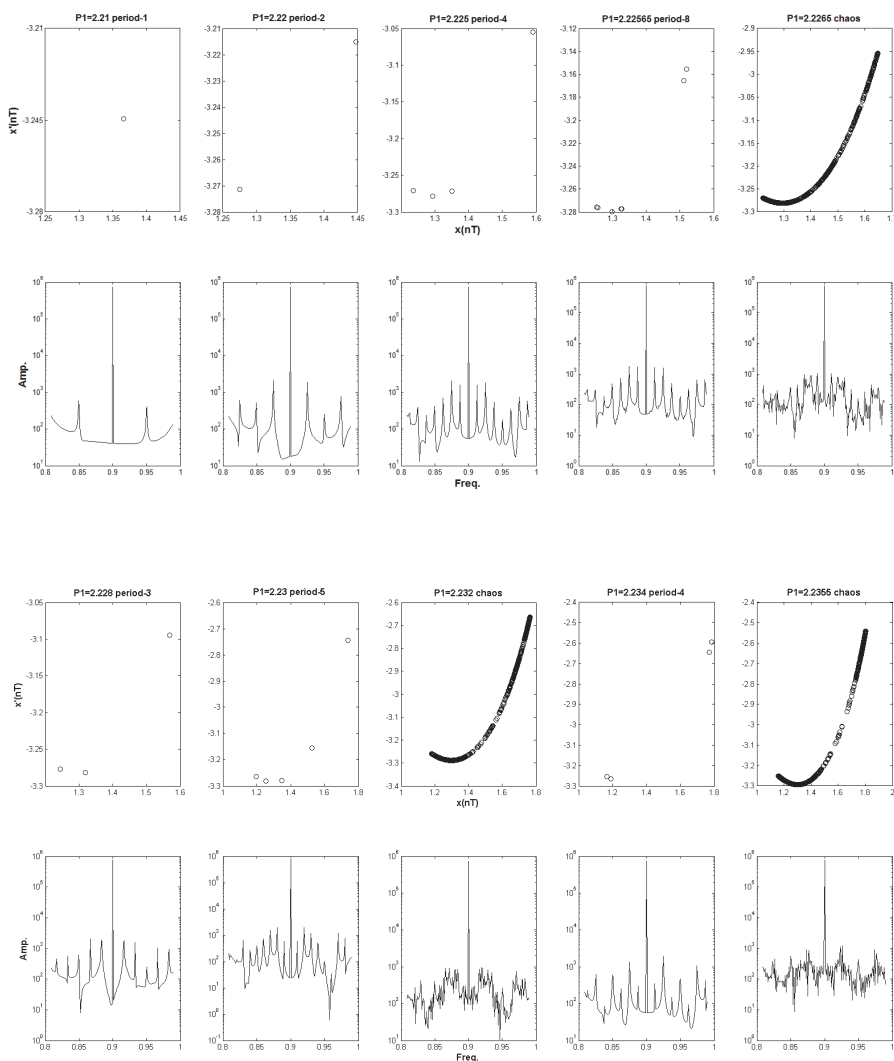
圖十 取圖三振幅 1.42~1.52 之間； $x(nT)$ 與最大 Lyapunov 指數對振幅 P_1



圖十一 Poincaré 切面圖、頻譜圖-分析圖十之響應



圖十二 取圖七振幅 2.21~2.24 之間； $x(nT)$ 對振幅 P_1 之分歧圖



圖十三 Poincaré 切面圖、頻譜圖-分析圖十二之響應

取圖七振幅在 2.21~2.24 放大並詳細分析其響應，繪出圖十二 $x(nT)$ 對振幅分歧圖，以週期一運動，並隨振幅遞增而週期倍增到混沌響應，在混沌響應振幅之間出現週期三與週期五運動。圖十三 Poincarè 切面圖、頻譜圖，分析圖十二分歧圖之響應形態，振幅為 2.21、2.22、2.225、2.22565、2.2265、2.228、2.23、2.232、2.234、2.2355 等等，圖十三中 Poincarè 切面圖分別為 1 點、2 點、4 點、8 點、無限點、3 點、5 點、無限點、4 點、無限點等等，及頻線增量分別是 0.05/1、0.05/2、0.05/4、0.05/8、0.05/∞、0.05/3、0.05/5、0.05/∞、0.05/4 等等，分析響應分別為週期一、週期二、週期四、週期八、混沌、週期三、週期五、混沌、週期四等等。

肆、結論

分析非線性系統受參激和外力多頻率激振之數值模擬。當頻率互鎖運動，分析吸子盆地，穩態解的起始點是以基本週期交替出現，週期- n 運動將對應有 n 個起始點。取多個初始條件之分歧圖，能分辨頻率互鎖之響應，並呈現多重解之曲線。分析單一或 50 個初始條件之分歧圖，有以週期一響應、隨振幅增加出現以週期倍增，進入混沌運動，在混沌響應參數之間出現週期三與週期五運動。配合以相圖、頻譜圖、Poincarè 切面圖和 Lyapunov 指數，證明參激和外力激頻率之分歧圖，在參數變化的穩態響應型態。

伍、致謝

本研究感謝德霖技術學院校內專案研究計畫編號（103獎校專研01）補助得以完成，特此致謝。

陸、參考文獻

1. Y. Kang, Y. P. Chang, and S. C. Jen, "Strongly non-linear oscillations of winding machines, Part I: mode-locking motion and routes to chaos," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 3, pp. 473-492, 1998.
2. Y. Kang, S. C. Jen, S. S. Shyr, and Y. P. Chang, "Frequency-locked motion and quasi-periodic motion of a piecewise-linear system subjected to externally nonsynchronous excitations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 214, no. 2, pp. 377-382, 1998.
3. Y. P. Chang, S. C. Jen, S. H. Tu, S. S. Shyr, and Y. Kang, "Mode-locking motion and chaos of rotors mounting on nonlinear bearings," *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 6, no. 3, pp. 191-200, 2000.
4. A. B. Oks, S. L. Tsyfanskii, and T. Iwatsubo, "Asynchronous stabilization phenomena of resonant oscillations in nonlinear systems," *JSME International Journal Series III*, vol. 34, no. 1, pp. 26-32, 1991.
5. A. Oks, S. Yano, S. Tsyfanskii, and Iwatsubo, "Suppression phenomena of resonant oscillations in strongly nonlinear systems due to additional asynchronous excitations," *JSME International Journal Series C*, vol. 36, pp. 45-51, 1993.
6. C. Padmanabhan and R. Singh, "Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 184, no. 1, pp. 35-58, 1995.
7. C. J. Luo and C. Gegg, "Periodic motions in a periodically forced oscillator moving on a oscillating belt with dry friction," *ASME Journal Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 1, pp. 212-220, 2006.
8. C. J. Luo and C. Gegg, "On the mechanism of stick and nonstick, periodic motions in a periodically forced, linear oscillator with dry friction," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 128, pp. 97-105, 2006.

9. G. Cheng and J. W. Zu, "Dynamics of a dry friction oscillator under two-frequency excitations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, pp. 591-603, 2004.
10. G. Cheng and J. W. Zu, "A numerical study of a dry friction oscillator with parametric and external excitations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, pp. 329-342, 2005.
11. K. Czolczynski and T. Kapitaniak, "On the existence of a stable periodic solution of an impacting oscillator with two fenders," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, pp. 3115-3134, 2004.
12. K. Czolczynski and T. Kapitaniak, "On the existence of a stable periodic solution of two impacting oscillators with damping," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, pp. 3931-3947, 2004.
13. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D*, vol. 16, pp. 285-315, 1985.

